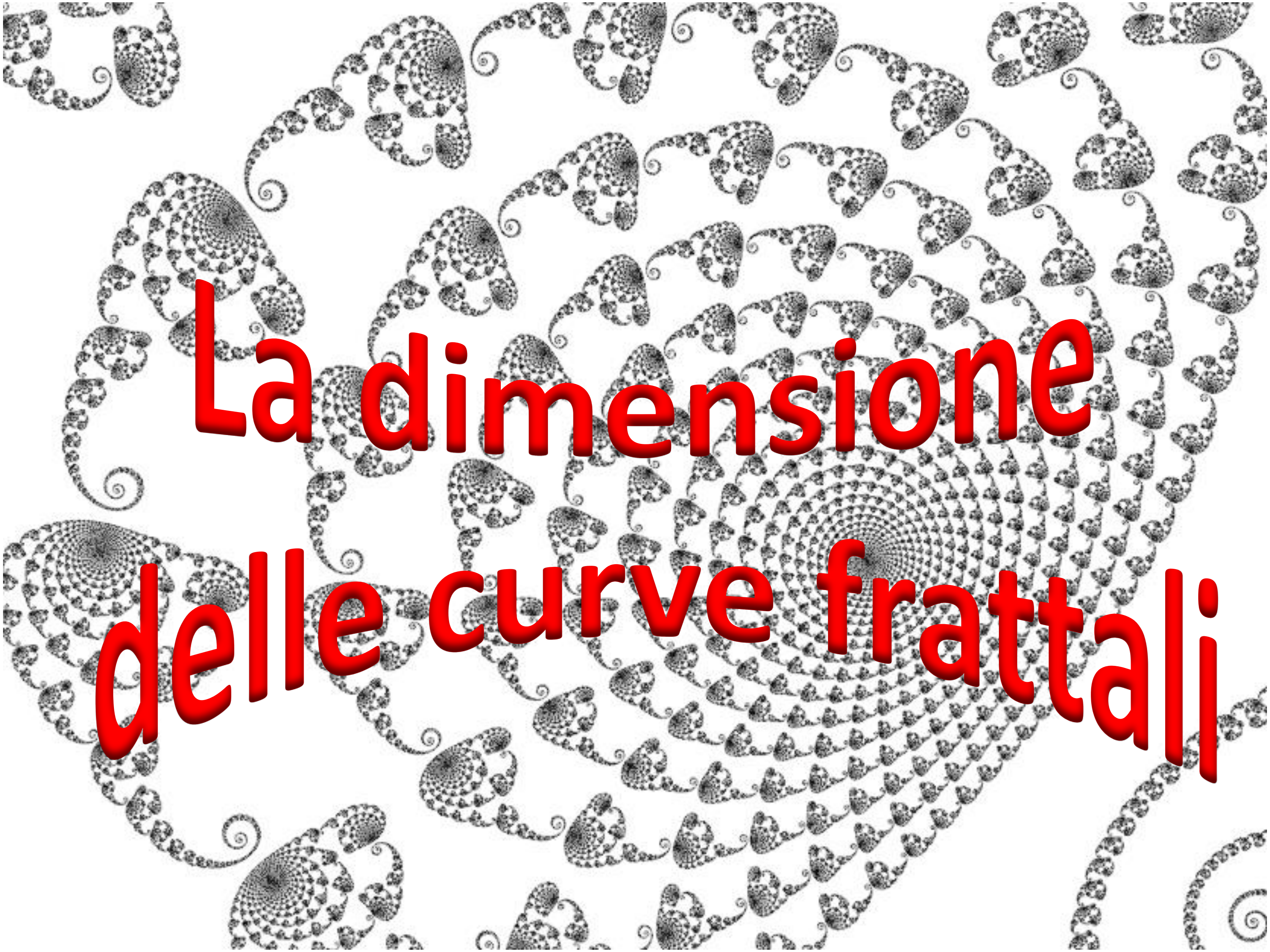
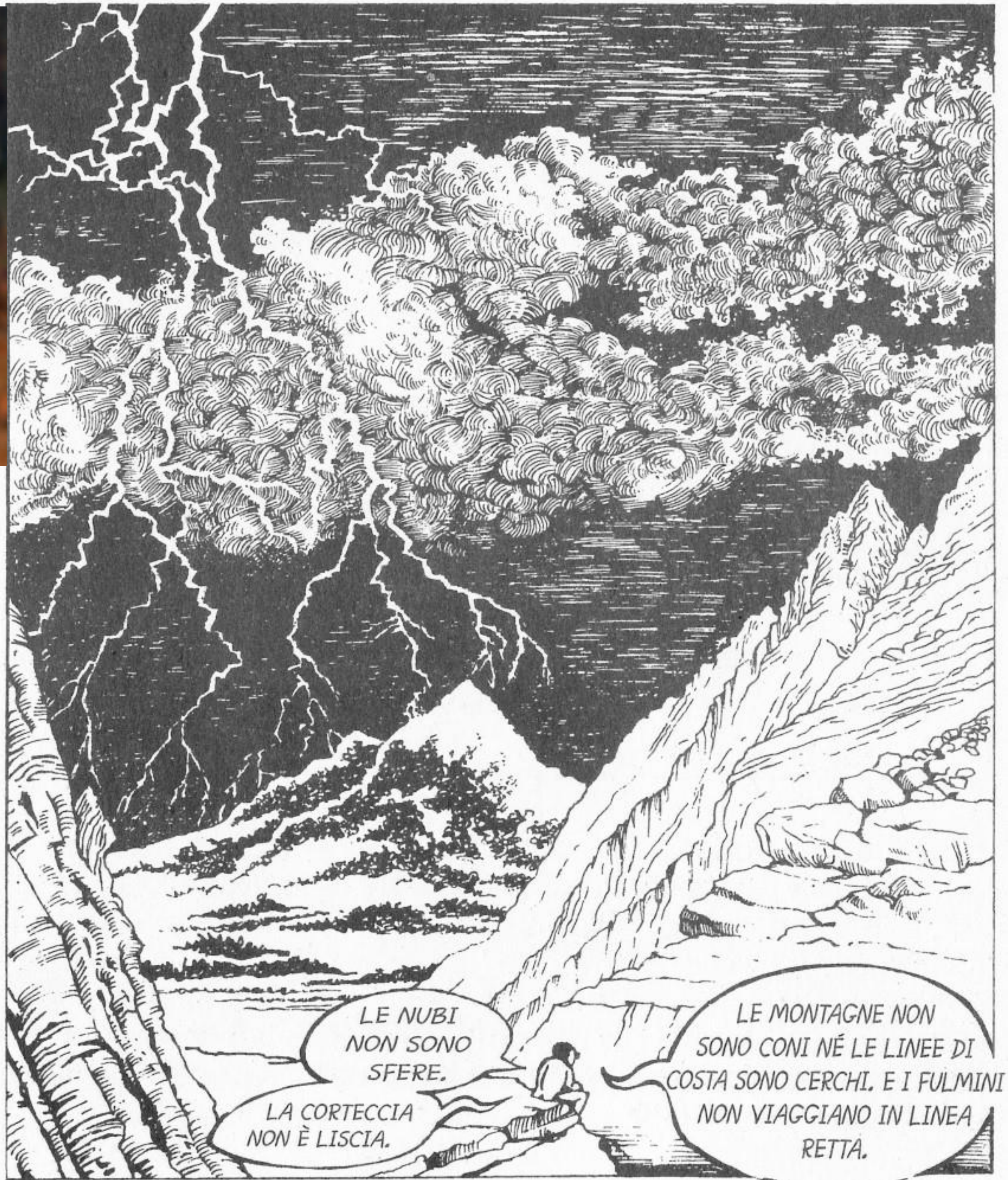
La dimensione delle curve frattali



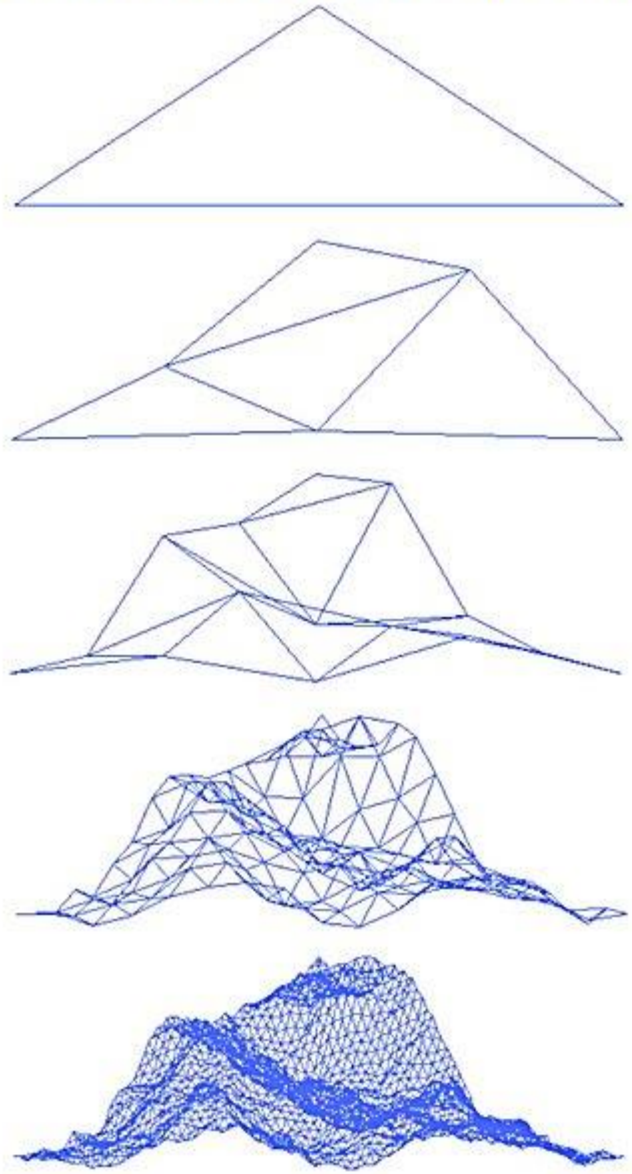
Bruno Jannamorelli

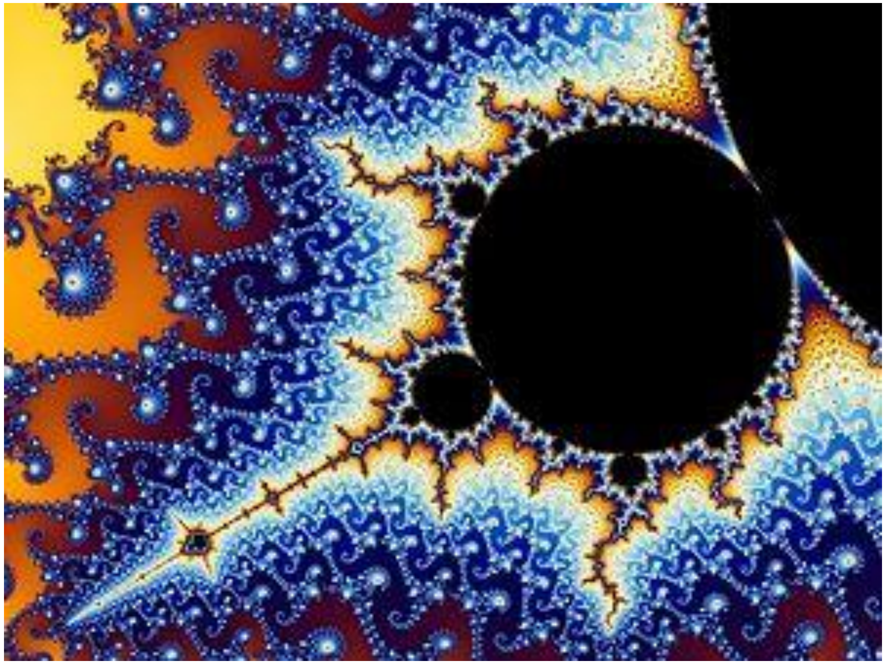
Benoit Mandelbrot (1924-2010)

… la varietà di configurazioni è una sfida a studiare quelle forme che la geometria euclidea tralascia come informi, a investigare la morfologia dell'amorfo…



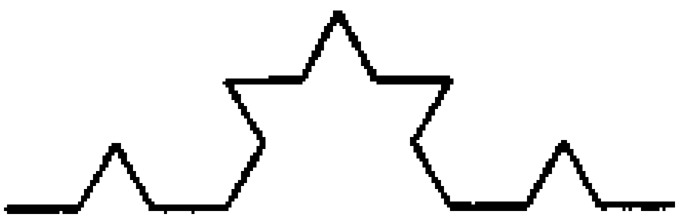
A fractal that models the surface of a mountain





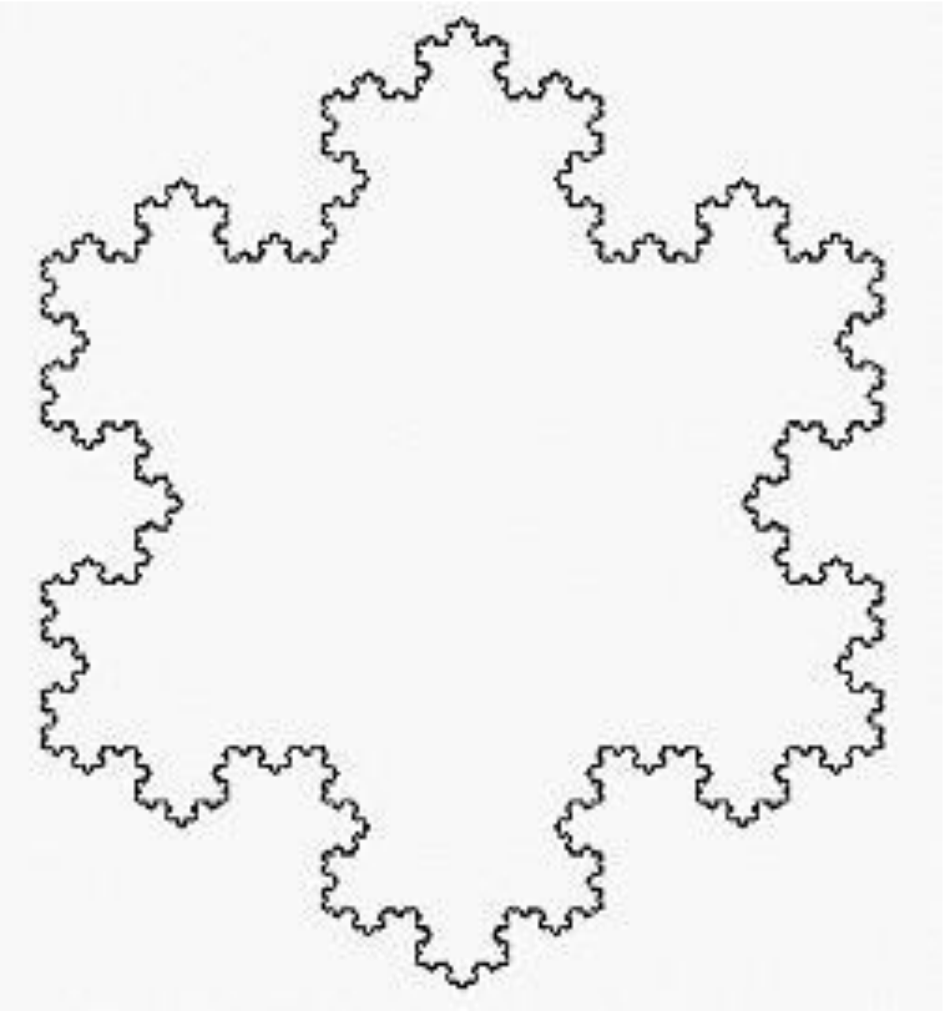
Il merletto di H. von Koch

Helge von Koch (1870 – 1924)

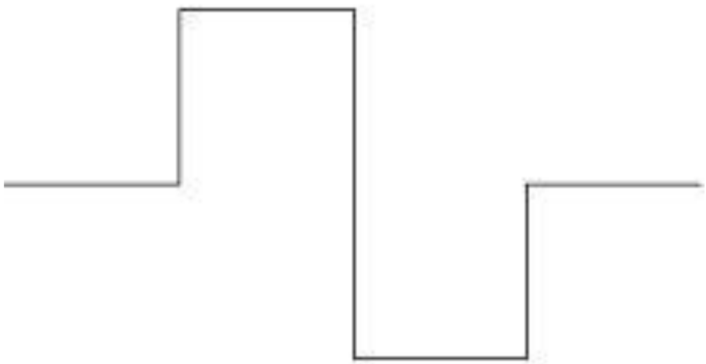


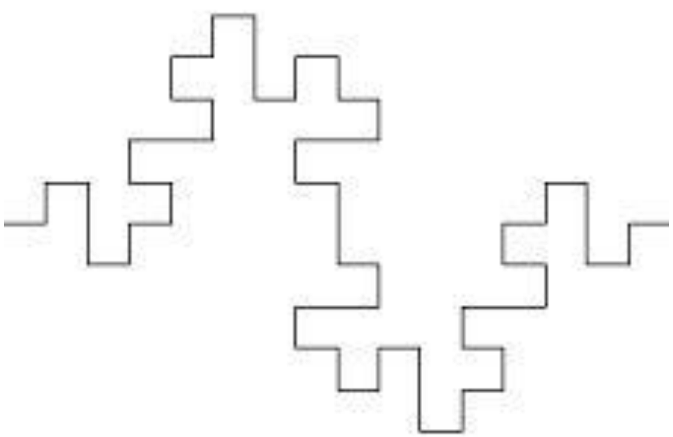
Ripetendo la stessa costruzione sui lati di un triangolo equilatero si ha:

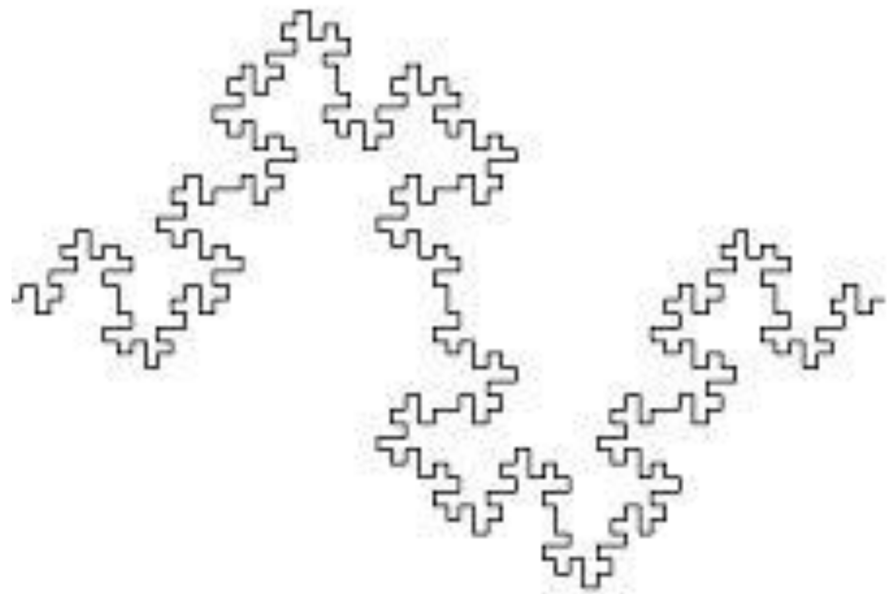
Il fiocco di neve di von Koch



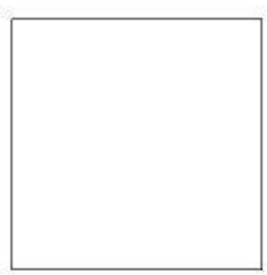
La ***greca*** :

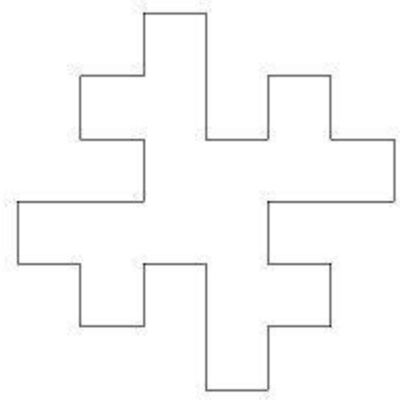


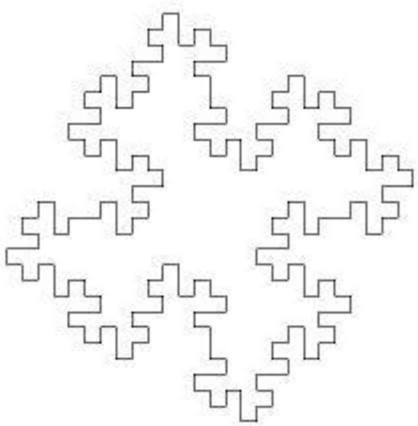


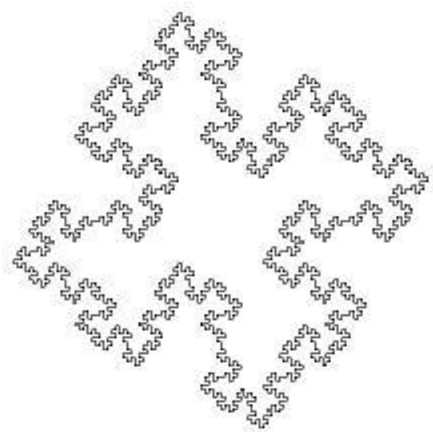


Ripetendo la stessa costruzione sui lati di un quadrato si ha:

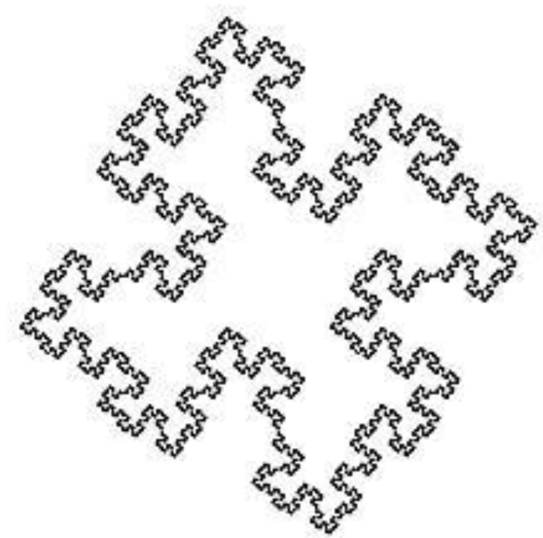




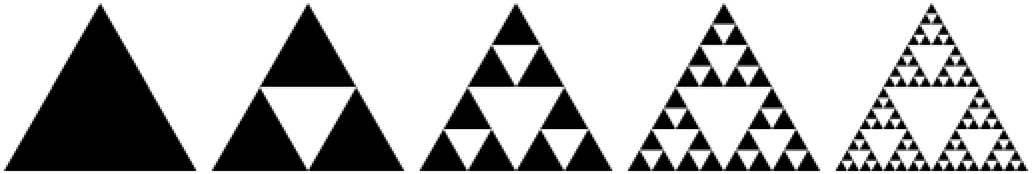


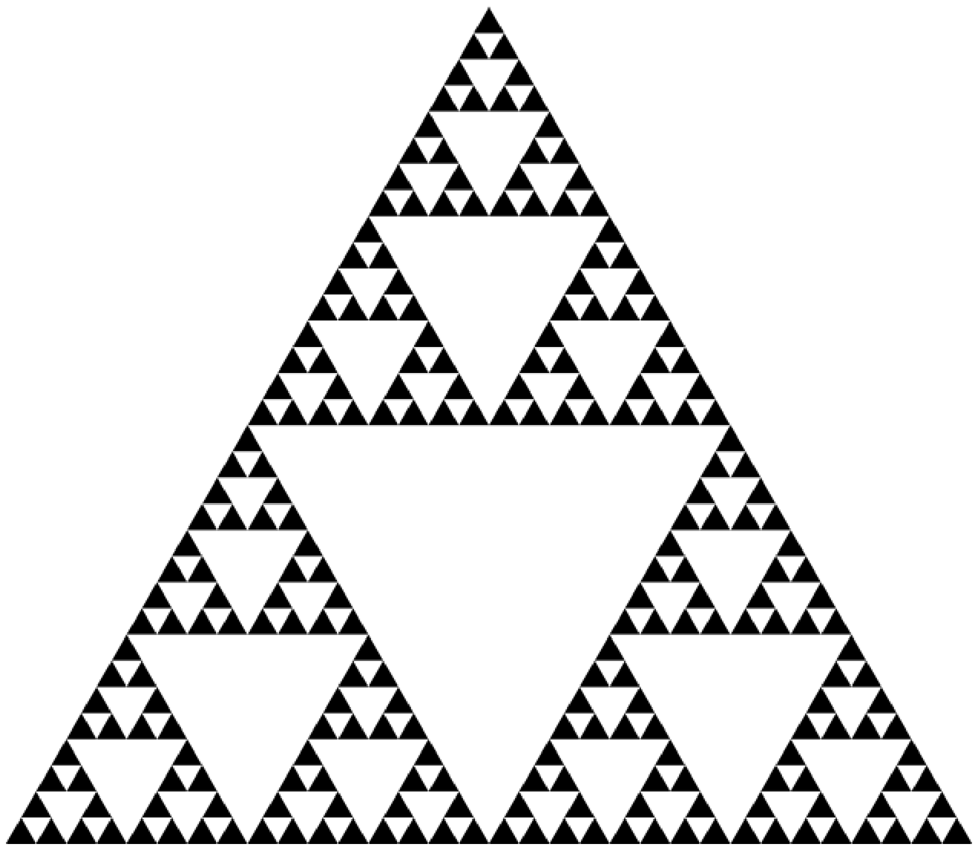


L'isola di Koch

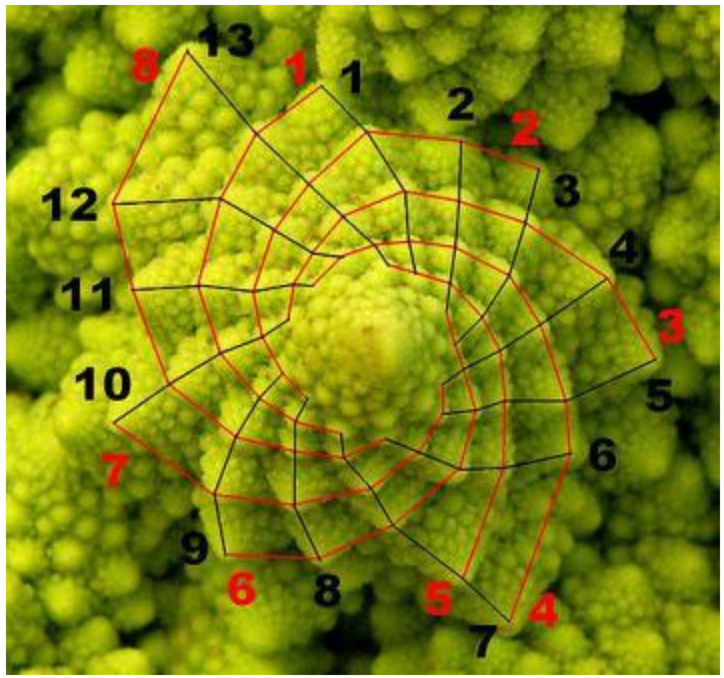


Il triangolo di Sierpinski

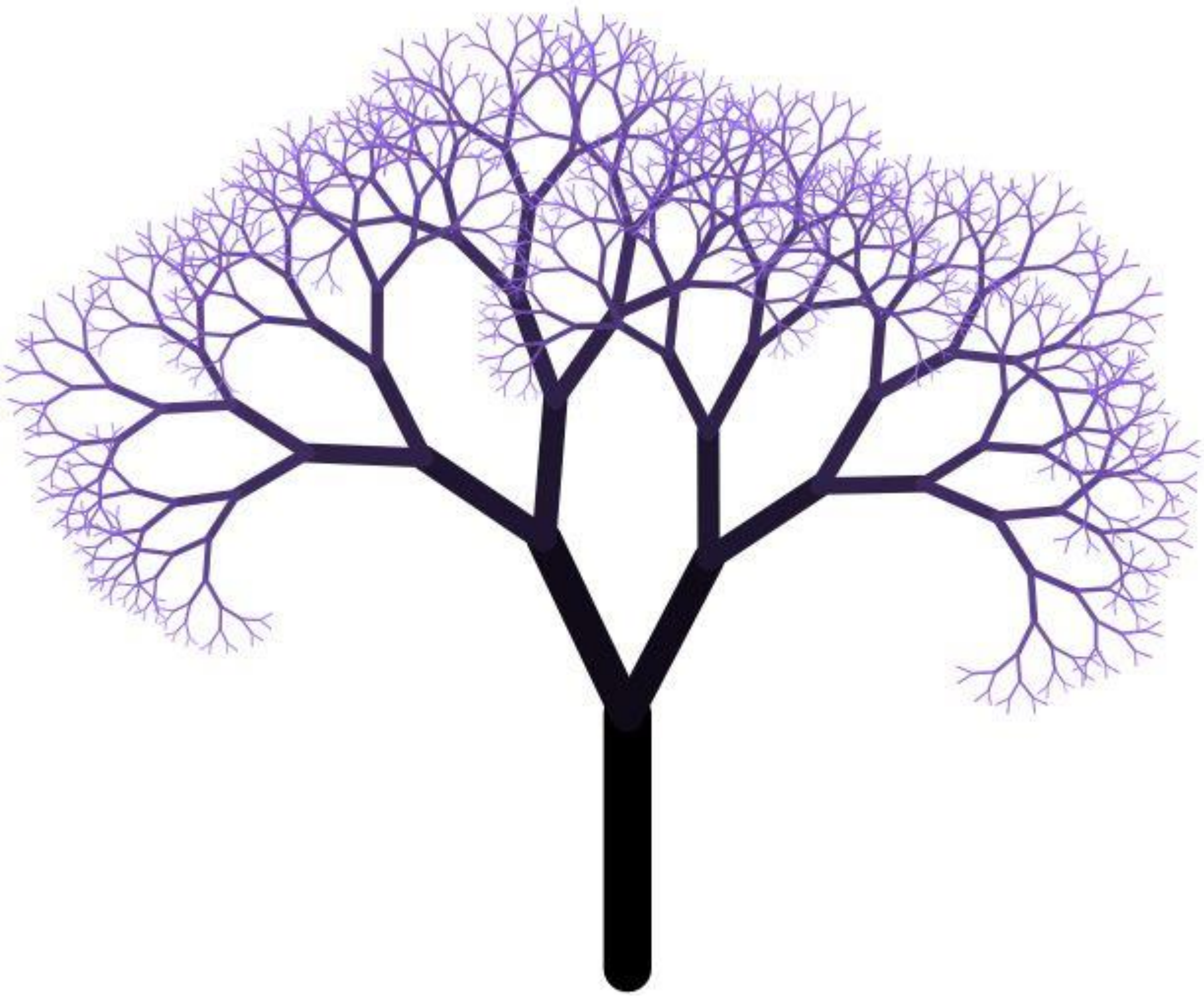




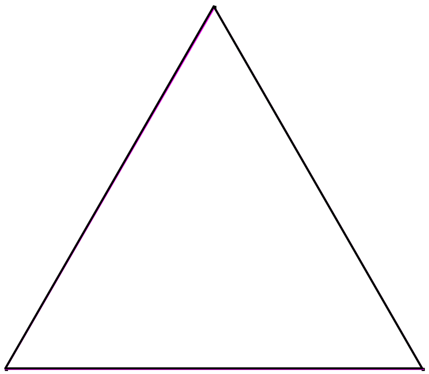
Waclaw
Franciszek
Sierpinski
(1882 – 1969)

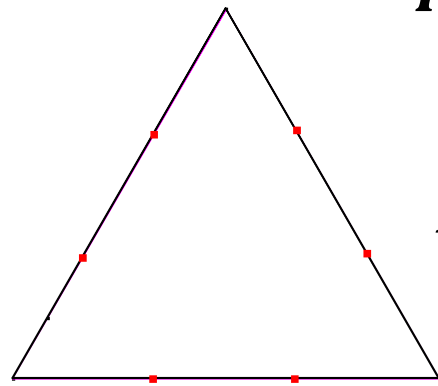


13
8
1
1
2
2
3
12
4
11
3
10
5
6
7
9
6
8
5
4
7



Osserviamo il fiocco di neve di von Koch:

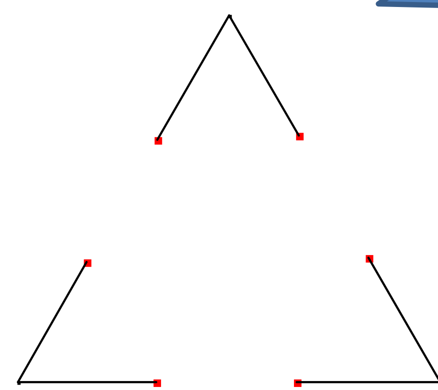




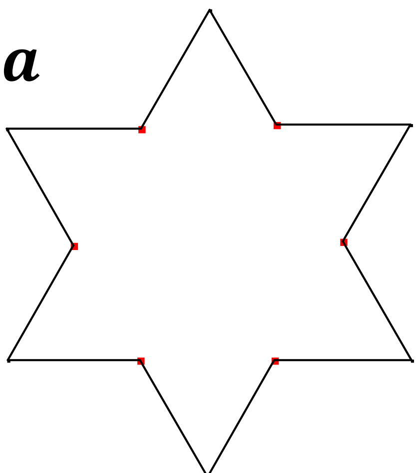
$P_1 = 9a$

$$A_1 = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3}$$

3a



$P_2 = 12a$



$$A_2 = A_1 + \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}$$

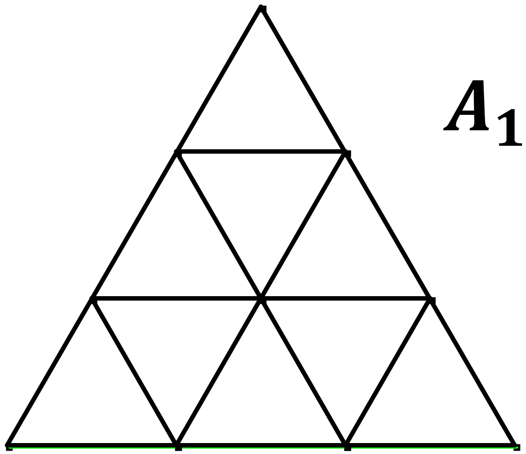
I lati dei triangoli sono:

$$3a, \quad a, \quad \frac{a}{3}, \quad \frac{a}{9}, \ldots$$

I perimetri sono:

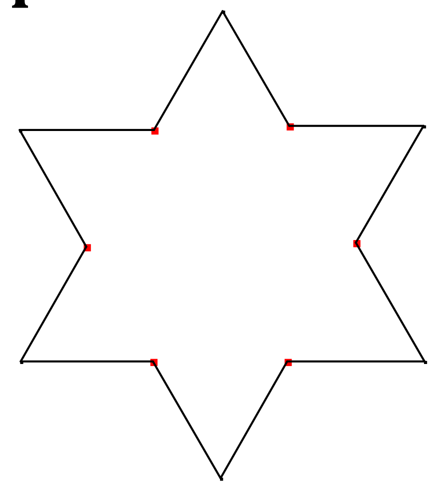
$$9a, \quad 12a, \quad 16a, \quad \frac{64}{3}a, \quad \ldots$$

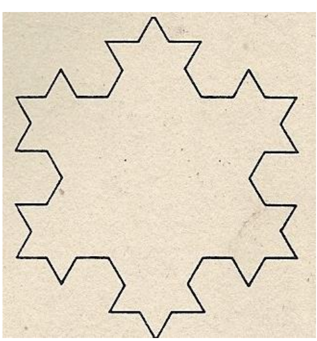
Le aree sono:



$$A_1 = 9\frac{1}{2}a\frac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad A_1 = \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$A_2 = A_1 + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$





$$A_3 = A_2 + 12\frac{1}{2}\frac{a}{3}\frac{1}{2}\frac{a}{3}\sqrt{3} = A_2 + \frac{1}{3}a^2\sqrt{3}$$

$$A_4 = A_3 + 3\cdot 16\frac{1}{2}\frac{a}{9}\frac{1}{2}\frac{a}{9}\sqrt{3} = A_3 + \frac{4}{27}a^2\sqrt{3}$$

All'area del primo triangolo si sommano aree sempre più piccole:

$$\boldsymbol{A = \frac{9}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} + \frac{4}{27}a^2\sqrt{3} + \ldots}$$

Si tratta, a parte il primo termine, di una progressione geometrica infinita di ragione $\frac{4}{9}$.

Quindi l'area totale è data da:

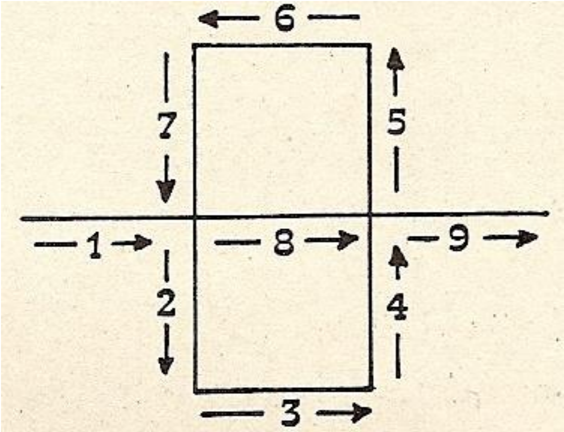
$$A = \frac{9}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18}{5}a^2\sqrt{3}$$

La curva di Peano

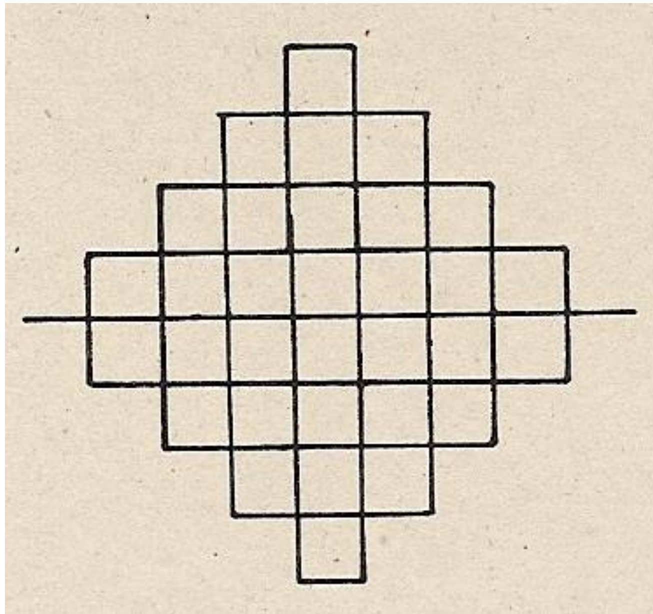
Dividiamo un segmento in tre parti …

Giuseppe Peano (1858 – 1932)

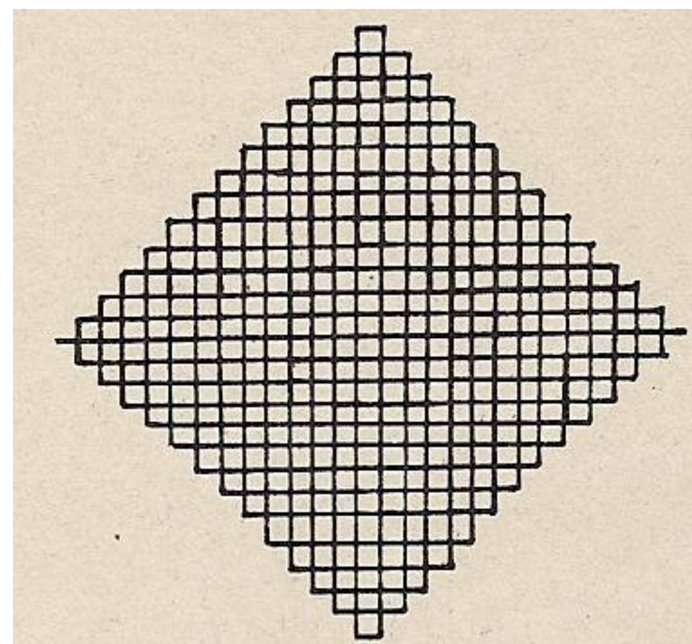
e costruiamo una figura con nove di queste parti:



Ripetendo la stessa operazione su ciascun segmento si ha:



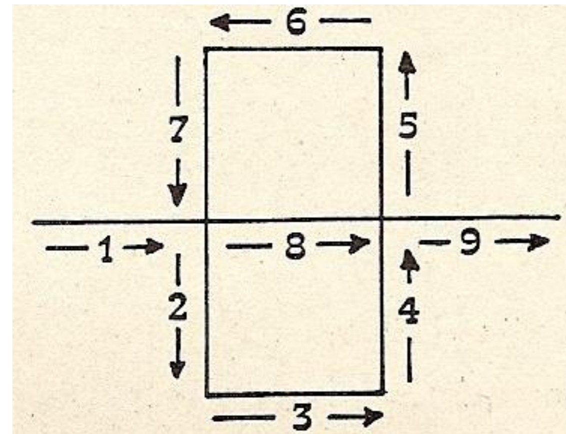
E poi …



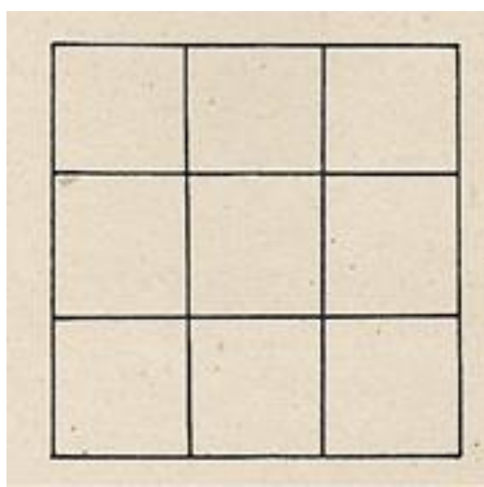
Continuando sempre la stessa operazione, la poligonale tende a una curva: ***la curva di Peano***.

La curva di Peano ricopre il piano …

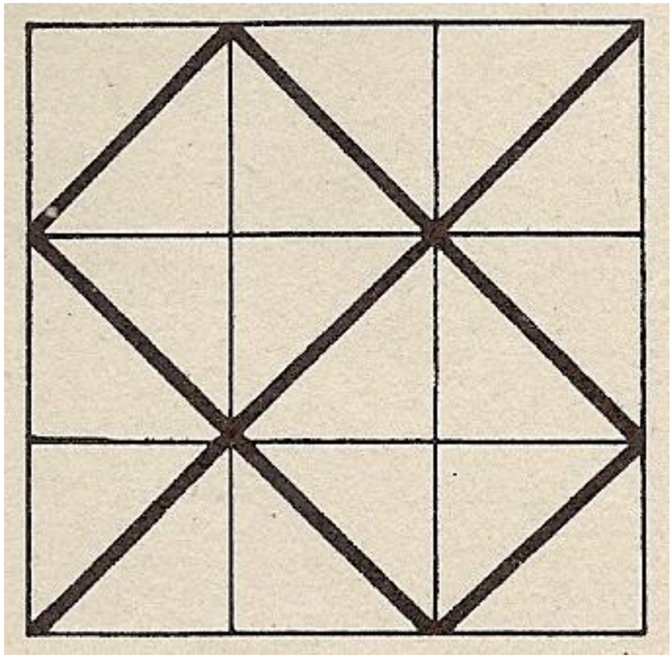
Confrontiamo la figura formata da 9 segmenti nel primo passo della curva …



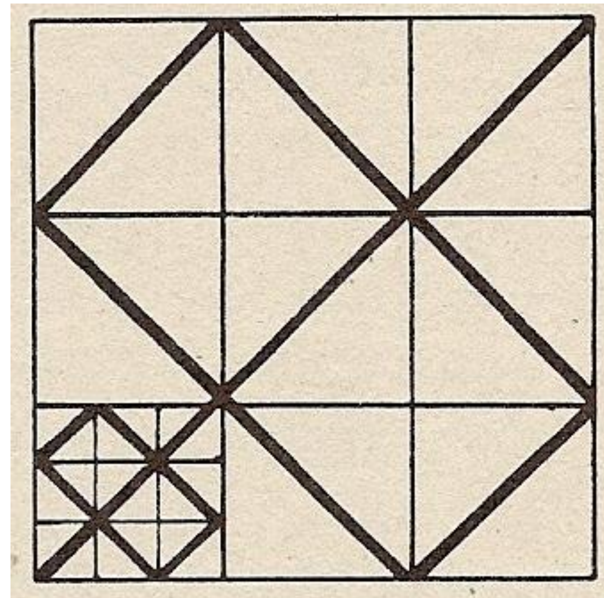
Con un quadrato formato da 9 quadratini.



È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i 9 segmenti e i 9 quadratini:



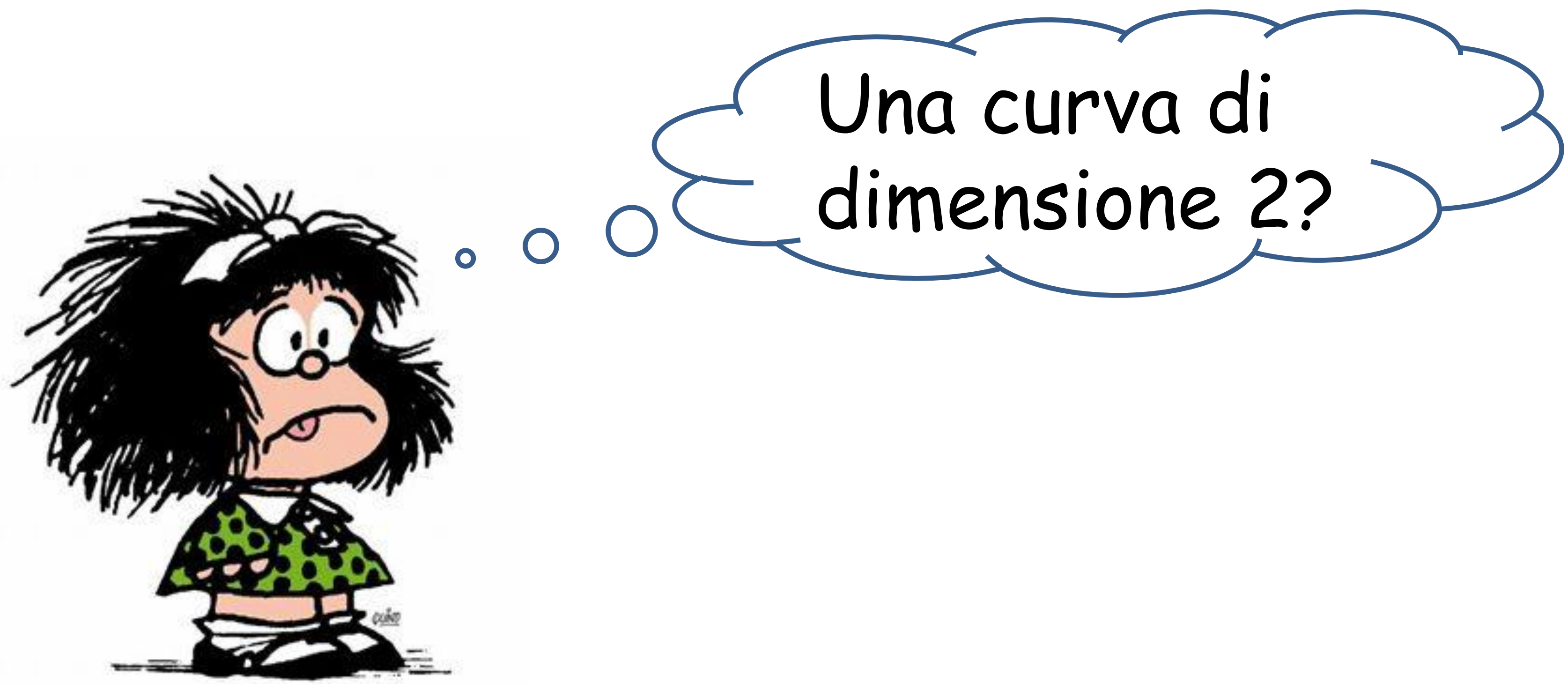
Ad ogni segmento-diagonale corrisponde il suo quadratino e viceversa.



La corrispondenza biunivoca fra i 9 segmenti della poligonale e i 9 quadratini resta valida quando, ripetendo la costruzione, i segmenti diventano sempre più piccoli.

Passando al limite, sia la diagonale che il quadratino tendono a un punto: la curva riempie il quadrato.

La dimensione della curva di Peano è 2, come la dimensione del quadrato.



Se indichiamo con

- ***s*** il numero delle parti in cui è diviso il segmento iniziale (s = 3)
- ***n*** il numero di lati della poligonale (n = 9)

Si ha:

$$n = s^2$$

L'esponente 2 indica la dimensione della curva.

Ma allora… ritorniamo al merletto di von Koch:

$s = 3$

$n = 4$

$4 \neq 3^2$

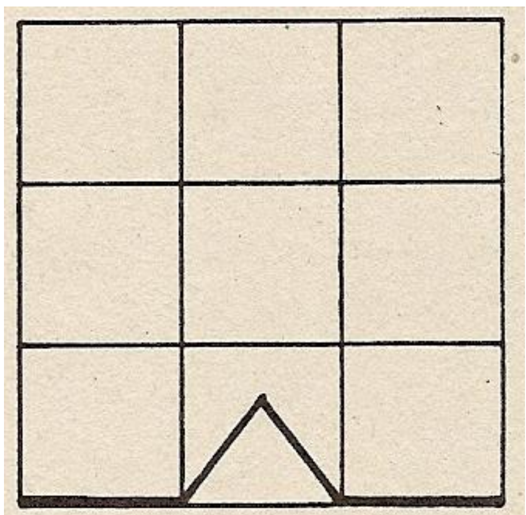
Possiamo scrivere:

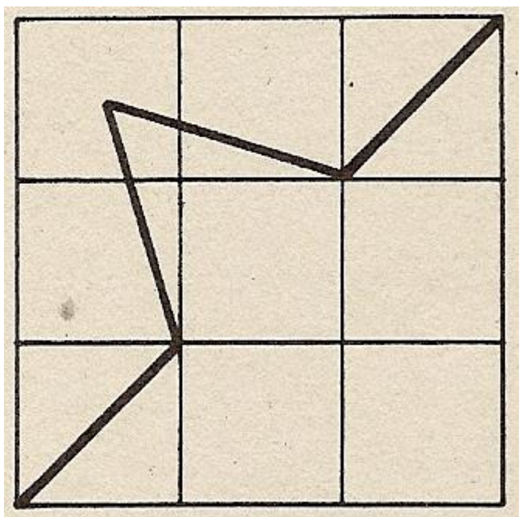
$$4 = 3^d$$

La dimensione **d** del ***merletto*** è un numero: $1 < d < 2$

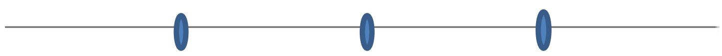
.

Infatti, non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra 4 segmenti e 9 quadrati:

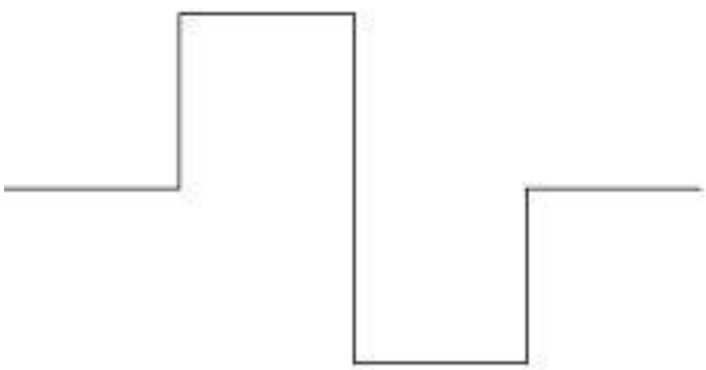




Nel caso della ***greca*** :



$s = 4$



$n = 8$

Possiamo scrivere :

$$8 = 4^d$$

… ma come si calcolano queste dimensioni?

… con i logaritmi!

$$Se\ 4 = 3^{d} \quad allora\ \ln(4) = \ln\left(3^{d}\right) \ \rightarrow \ d = \frac{ln4}{ln3} = 1{,}26$$

La dimensione del merletto di von Koch è 1,26

$$Se\ 8 = \ 4^d \quad allora\ \ln(8) = \ln\left(4^d\right) \ \rightarrow \ d = \frac{ln8}{ln4} = 1{,}5$$

La dimensione della greca di von Koch è 1,5