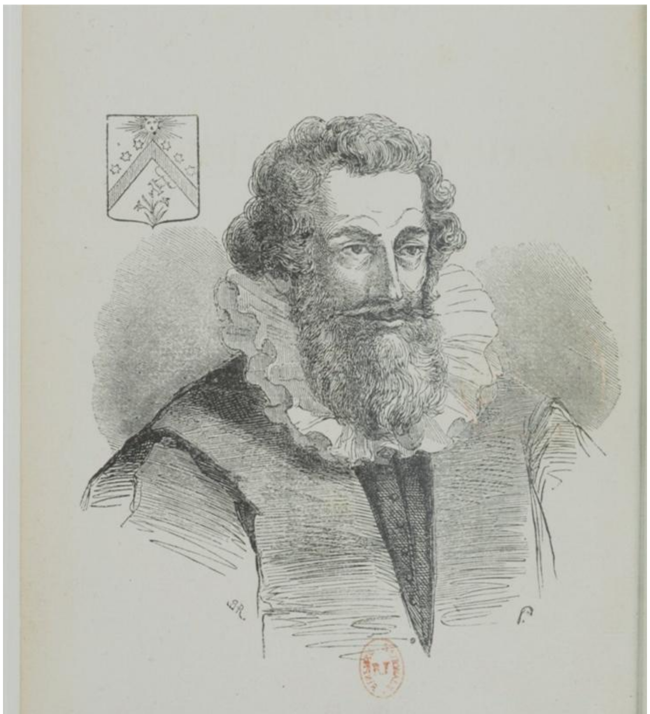
ELISABETTA ULIVI

Aspetti dell'opera algebrica di François Viète: una proposta didattica

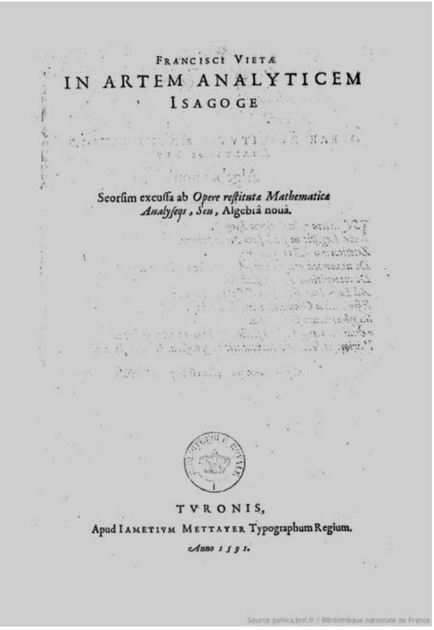
Cenni biografici

François Viète, signore di Bigotière, nasce da famiglia agiata a Fontenay-le-Compte, in Poitou, nel 1540. Studia diritto presso l'Università di Poitiers; nel 1560 si iscrive al foro di Fontenay ed esercita l'avvocatura.
Nel 1564 diventa precettore di Catherine de Parthenay nella casa de Soubise. Nel 1571 è avvocato al parlamento di Parigi e nel 1573 viene nominato consigliere al parlamento della Bretagna, a Rennes. Nel 1576 entra al servizio del re Enrico III di Francia e nel 1580 diventa *maître des requêtes* (uditore al Consiglio di Stato) al parlamento di Parigi e consigliere speciale di Enrico di Navarra, il futuro re Enrico IV di Francia.
Durante la guerra tra Francia e Spagna, viene incaricato di decifrare i messaggi criptati degli spagnoli con un procedimento basato su una chiave di oltre 500 caratteri, pubblicando poi il suo metodo di decifrazione.
Tra il 1584 e il 1589 egli viene allontanato dal potere per le pressioni della Lega Cattolica in quanto ugonotto. È questo il periodo, insieme a quello tra il 1564 e il 1568, nel quale riesce a dedicarsi maggiormente alla matematica.
Nel 1594 entra al servizio di Enrico IV e si converte al cattolicesimo. Morirà nel 1603, lasciando una figlia, Suzanne, nata dal matrimonio con Julienne Leclerc.



Principali opere

Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus 1571, 1579


FRANCISCI VIETÆ
IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE

Seorſim excuſſa ab *Opere reſtitutæ Mathematicæ Analyſeωs*, *Seu*, Algebrâ nouâ.

TVRONIS,
Apud IAMETIVM METTAYER Typographum Regium.
Anno 1591.

In artem analyticem Isagoge, Tours, 1591

Zeteticorum libri quinque, Tours, 1593

Supplementum geometriae, Tours, 1593

De numerosa potestatum ad exegesim resolutione (pub. da Marino Ghetaldi, 1600)

De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo (pub. da Alexander Anderson, 1615)

Effectionum geometricarum Canonica recensio (pub. da Anderson, 1615)

Ad logisticem speciosam Notae priores (pub. da Jean de Beaugrand, 1631)

Opera mathematica (pub. da Frans van Schooten, Leida, 1646)

Notazioni algebriche prima di Viète
Algebra retorica e sincopata
Algebra numerica

Leonardo Pisano, *Liber abaci*, 1202 e 1228

unus census et 5 radices equantur denariis 15

$x^2 + 5x = 15$

census census census census et 100 census census equantur 10000 dragmis

$x^8 + 100x^4 = 10000$

numerus, *denarius*, *dragma* = numero

1*radix*, *res* $= x$

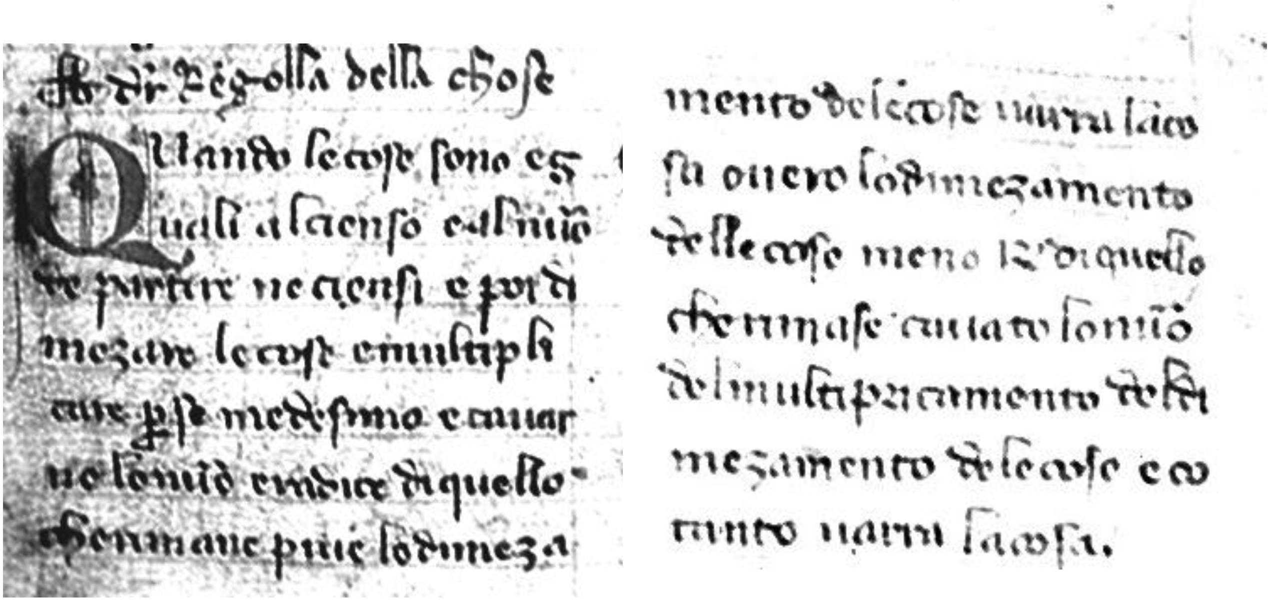
$1 census = x^2$

$1 cubus = x^3$

Le potenze successive alla terza vengono combinate col principio additivo.

radicem de 5 = $\sqrt{5}$

Paolo Gherardi, *Libro di ragioni*, 1328
(BNF, Magl. XI. 87)



Regolla della chosa

Quando le cose sono eguali al cienso e al numero de' partire ne ciensi, e poi dimezare le cose e multiplicare per se medesimo e cavarne lo numero, e radice di quello che rimane più lo dimezamento dele cose varrà la cosa, overo lo dimezamento delle cose meno R di quello che rimane cavato lo numero del multipricamento del dimezamento dele cose, e cotanto varrà la cosa.

$$bx = ax^2 + c$$

$$\frac{b}{a}x = x^2 + \frac{c}{a} \qquad\qquad x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

abiamo che 76 cose sono eguali a 1 cienso e a 144. Di' sempre: de' partire ne' censi e poi dimezare le cose che sono 76, che la metà è 38, multipricalo per se medesimo fa 1444, trane lo numero ch'è 144 e rimane 1300, e co' radice di 1300 più lo dimezamento dele cose che fu 38 valse la cosa.

$$76x = x^2 + 144$$

$$x = 38 + \sqrt{38^2 - 144} = 38 + \sqrt{1300}$$

Luca Pacioli, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, 1494 e 1523


Summa de Arithmetica geo metria. Proportioni: et proportionalita:

Continentia de tutta lopera.

10000 *ce.* equali a 100 *ce.cu.* $\widetilde{p}$ 1*ce.p°.r°.* $\quad 10000x^2 = 100x^6 + x^{10}$

10000 *co.* equali a 100 *p°.r°.* $\widetilde{p}$ 1*cu.cu.* $\quad 10000x = 100x^5 + x^9$

10000 equali a 100 *ce.ce.* $\widetilde{p}$ 1*ce.ce.ce.* $\quad 10000 = 100x^4 + x^8$

$1co. = x \qquad 1ce. = x^2 \quad 1cu. = x^3 \quad 1\,p°.r°. = x^5$

(*co.* = cosa, *ce.* = censo, *cu.* = cubo, $p°.r°.$ = primo relato)

Le potenze vengono combinate col principio moltiplicativo.

R 5 = $\sqrt{5}$ **RV 7 $\widetilde{m}$ R5 = $\sqrt{7-\sqrt{5}}$** (radice quadrata universale)

Luca Pacioli, *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos* 1477-1480 (BAV, Vat. Lat. 3129)

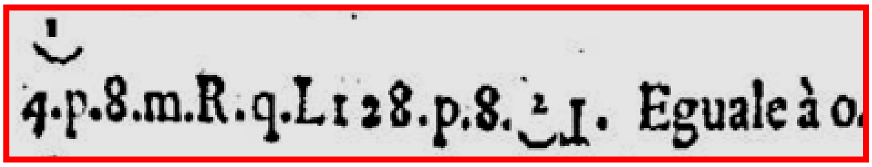
Scrive le precedenti equazioni:

$100^{\square\triangle}$ più $1^{\square\oslash}$ equale a $10000^{\square}$	$100x^6 + x^{10} = 10000x^2$
$100^{\oslash}$ più $1^{\triangle\triangle}$ equale a 10000^{co}	$100x^5 + x^9 = 10000x$
$100^{\square\square}$ più $1^{\square\square\square}$ equale a 10000	$100x^4 + x^8 = 10000$

$1^{co} = x$ $\quad$ $1^{\square} = x^2$ $\quad$ $1^{\triangle} = x^3$ $\quad$ $1^{\oslash} = x^5$

sempre combinati col principio moltiplicativo.

Rafael Bombelli, *Algebra*, 1572



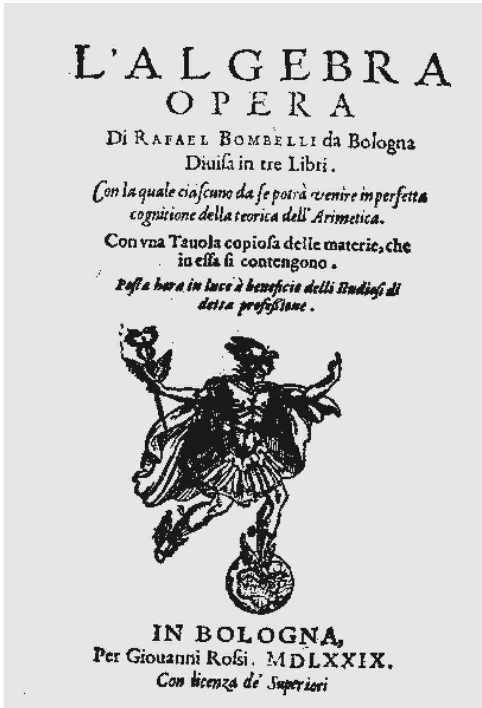
Significa

$4x + 8 - \sqrt{128 + 8x^2} = 0$

$\underset{\smile}{n} = x^n$ (tanto = x potenza = x^2)

R. q. ⌊128 p. $8x^2$ ⌋ (radice quadrata legata)

R.q. 5 = $\sqrt{5}$



Nella *Triparty en la science des nombre* di Nicolas Chuquet (composta nel 1484 e pubblicata ne 1880) erano già presenti notazioni simili (es. $5^1 = 5x$).

Simbolismo di Viète

Principale innovazione

Logistica speciosa (algebra letterale)

Introduce l'uso di lettere maiuscole, vocali e consonanti, rispettivamente per indicare le incognite ed i parametri (dati del problema, coefficienti e termine noto di una equazione) .

Grandezze scalari	**Generi delle grandezze**
incognite (*A, E, I, O, U, Y*) e loro potenze	**parametri (*B, D, F, G, H, S, Z …*)**
***A* (lato o radice)** $\rightarrow x$	***B* (lunghezza o larghezza)**
***A* quadrato (quad.)** $\rightarrow x^2$	***B* piano**
***A* cubo (cub.)** $\rightarrow x^3$	***B* solido**
***A* quadrato quadrato** $\rightarrow x^4$	***B* piano piano**
***A* quadrato cubo** $\rightarrow x^5$	***B* piano solido**
***A* quadrato quadrato cubo** $\rightarrow x^7$	***B* piano piano solido**
***A* quadrato cubo cubo** $\rightarrow x^8$	***B* piano solido solido**
***A* cubo cubo cubo** $\rightarrow x^9$	***B* solido solido solido**

G planum in A quad. – B solido in A – A quad. quad. aequatur Z plano plano
(principio di omogeneità)

$$\boldsymbol{GA^2 - BA - A^4 = Z} \qquad (gx^2 - bx - x^4 = z)$$

Logistica numerosa (algebra numerica)

1N $\rightarrow x$	**1QQ** $\rightarrow x^4$	**1QQC** $\rightarrow x^7$
1Q $\rightarrow x^2$	**1QC** $\rightarrow x^5$	**1QCC** $\rightarrow x^8$
1C $\rightarrow x^3$	**1CC** $\rightarrow x^6$	**1CCC** $\rightarrow x^9$

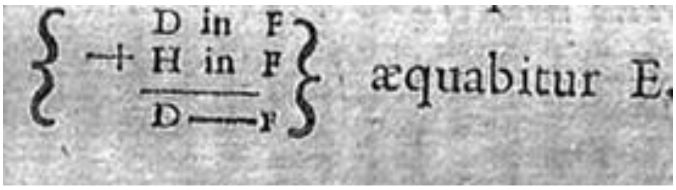
1QC – 15QQ + 85C – 225Q + 274N aequatur 120

($x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225\,x^2 + 274x = 120$)

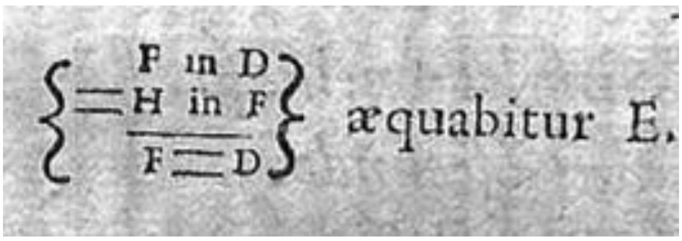
L’algebra di Viète è ancora fondamentalmente sincopata.
Non utilizza il simbolo di potenza, né quello di uguaglianza. Per le potenze successive alla terza adotta il principio additivo, come Diofanto. Nell’ambito dell’algebra letterale segue il principio di omogeneità.
Un simbolismo in parte diverso compare in edizioni postume delle *Opere* di Viète.

Zeteticorum libri quinque **(1593)**

Libro I



significa $$\frac{DF + HF}{D - F} = E$$



significa $$\frac{|FD - HF|}{|F - D|} = E$$

Libro II

latus minus est $l\,\frac{25}{3} - l\,\frac{5}{3}$, & *latus majus* $l\,\frac{25}{3} + l\,\frac{5}{3}$

significa: il lato minore è $\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}}$ e il lato maggiore $\sqrt{\frac{25}{3}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$

Libro IV

$$D \text{ in } \left\{ \begin{array}{l} B \text{ quadratum} \\ + B \text{ in } D. \end{array} \right.$$

significa $D(B^2 + BD)$

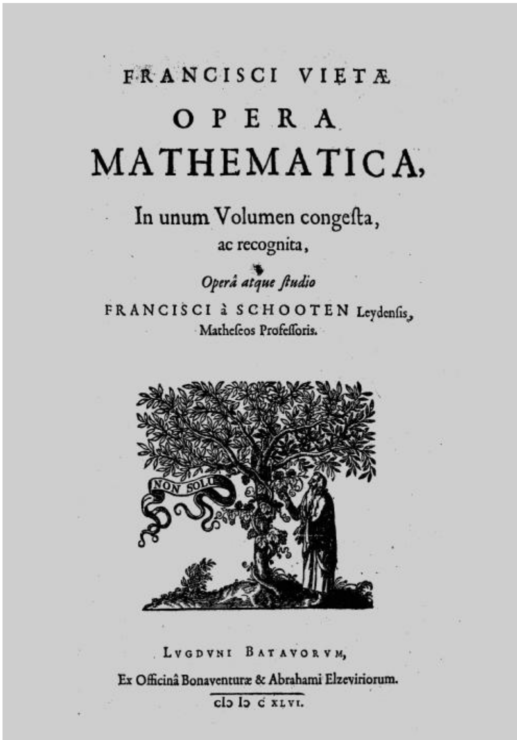
$$D \text{ in } \left[\begin{array}{l} B \text{ cubum } 2 \\ - D \text{ cubo} \end{array} \right.$$

significa $D(2B^3 - D^3)$

Edizione delle *Opere* del 1646: si usano delle abbreviazioni, sono eliminate la parentesi, compare il simbolo di radice attuale; negli ultimi due esempi l'espressione è scritta rispettivamente

D in $\overline{B \text{ quad.} + B \text{ in } D}$

D in $\overline{B \text{ cubum}2 - D \text{ cubo}}$


FRANCISCI VIETÆ
OPERA
MATHEMATICA,
In unum Volumen congesta,
ac recognita,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN Leydensis,
Matheseos Professoris.

LUGDUNI BATAVORUM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
cIↄ Iↄ c XLVI.

Isagoge

Il testo che fa da cardine a tutta l'opera di Viète è *In artem analyticem Isagoge* (*Introduzione all'arte analitica,* 1591). Vi sono descritti sia i metodi dell'analisi sia i fondamenti delle tecniche di manipolazione algebrica.

Capitolo I

Viète inizia facendo riferimento al classico metodo di *analisi e sintesi*. L'analisi, inventata da Platone e così chiamata da Teone, è il metodo in cui si assume come dato "ciò che si domanda" ossia la tesi, giungendo, passo dopo passo, ad una verità incontestabile; con il processo di sintesi si procede in modo inverso partendo da "ciò che è assegnato" ossia dalle ipotesi per ritornare alla tesi.
Secondo Viète ci sono tre tipi di analisi: *zetetica*, *poristica* e *retica o esegetica*. I primi due erano noti a Pappo, che ne parla nel VII libro delle *Collezioni matematiche*: vi sono evidenziati due tipi di analisi, teoretica e problematica, che si possono assimilare rispettivamente alla zetetica e alla poristica.
***Schema metodologico vietiano: tre tipi di analisi* (*ars analytica*)**
Si enuncia il problema da risolvere
Zetetica (prima fase dell'analisi): partendo dai dati del problema si giunge ad una prima uguaglianza o proporzione.
Poristica (seconda fase dell'analisi): dalla precedente uguaglianza o proporzione, mediante l'impiego di regole algebriche, si giunge ad un'altra uguaglianza o proporzione da cui scaturisce la soluzione del problema.
Retica o esegetica (terza fase dell'analisi): consiste nel dare un significato geometrico o aritmetico al risultato della Poristica. La retica o esegetica geometrica interpreta le formule in ambito geometrico, la retica o esegetica numerica riguarda le applicazioni numeriche che seguono lo svolgimento del problema.

Successivamente Viète definisce la "logistica numerosa" (algebra numerica) che si contrappone alla "logistica speciosa" (nuova algebra letterale):
"Logistice numerosa est quae per numeros, Speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, utpote per Alphabetica elementa".

Capitolo II

Tratta le regole relative a uguaglianze e proporzioni.

Capitolo III

Enuncia il ***"principio di omogeneità"*** per il quale si possono confrontare solo grandezze omogenee (quindi, in una equazione, i monomi devono avere la stessa dimensione).
Introduce la nomenclatura e le notazioni per le grandezze che sono di due tipi:
Grandezze scalari (incognita e potenze dell'incognita)
Generi delle grandezze (parametri)

Capitolo IV

Insegna poi ad effettuare le operazioni tra grandezze. Vengono estese le operazioni aritmetiche al contesto simbolico-letterale.

Capitolo V

Riguarda la riduzione di un'equazione alla forma canonica mediante:

Antitesi: trasporto di un termine da un membro all'altro cambiando segno (corrisponde all'*al-jabr* di al-Khwārizmī).

Ipobibasmo (abbassamento): divisione per un fattore comune, incognita o potenza dell'incognita.

PROPOSITIO II.

Proponatur A Cubus, plùs B in A Quadratum æquari Z plano in A, Dico per hypobibasmũ A Quadratum, plùs B in A æquari Z plano.

Proponatur *A* Cubus plus *B* in *A* Quadratum aequari *Z* plano in *A*
Dico per hypobibasmum *A* Quadratum plus *B* in *A* aequari *Z* plano

$$A^3 + BA^2 = ZA \qquad (x^3 + bx^2 = zx)$$

diventa $A^2 + BA = Z$

Parabolismo: divisione per il coefficiente del termine di grado massimo (corrisponde all'*al-hatt* di al-Khwārizmī).

Si dice "potenza" il termine di grado massimo, "potenza pura" se ha coefficiente unitario. Gli altri termini che contengono l'incognita sono detti "parodici alla potenza"; il termine noto è detto "omogeneo di comparazione" perché deve essere omogeneo alla potenza.

Ad logisticem speciosam Notae priores (1631)

Mentre nell'*Isagoge*, si esaminano le tecniche di calcolo in termini teorici, nelle *Notae priores* vengono studiate in termini algoritmici:

*Le regole fondamentali della logistica speciosa, di addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione sono già state esposte nel quarto capitolo dell'*Isagoge, *tuttavia è necessario chiarire ulteriormente alcune nozioni e circostanze comuni in cui ci si può imbattere, utilizzando la nuova logistica; pertanto le seguenti proposizioni vanno intese come strumenti nelle mani di colui che decide di operare con la logistica speciosa*

Utilizzando la logistica speciosa dimostra diverse relazioni; alcune si trovano nei Libri II e IX degli *Elementi*.

1-5) Riguardano le proporzioni, ad esempio:
1)Date tre grandezze A, B, G, trovare la quarta proporzionale

$A : B = G : X \qquad X = BG/A$

2) Si riferisce a grandezze in proporzione continua.
Date A e B, trovare la terza, la quarta, la quinta ecc. proporzionale

6) $(A + B) + (A - B) = 2A$

10) $(A + G) - (A - B) = G + B$

11) Sviluppo di $(A \pm B)^n$ con $n = 2, 3, 4, 5, 6$

13) $\boldsymbol{(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB}$

14) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

17-24) Analogamente per
$A^n - B^n$ con $n = 3, 4, 5, 6$ e $A^n + B^n$ con $n = 3, 5, 6$

25-44) Riguardano le potenze "adfectate"
$(A + B)^n \pm D(A + B)^m$ e $D(A + B)^m - (A + B)^n$ con $n > m$
27) $(A + B)^3 + D(A + B)^2 = (A + B)^2(A + B + D)$

45-56) Riguardano la "Genesis triangulorum", dove è esposta un'articolata teoria sulla costruzione dei triangoli rettangoli, necessaria per le dimostrazioni degli zetetici, che riguardano la risoluzione delle equazioni diofantee di secondo grado.

Zeteticorum libri quinque (1593)

Il cuore del programma vietiano sono gli *Zeteticorum libri quinque* che rappresentano la trattazione per eccellenza dell'arte analitica, la presentazione e la risoluzione di molte questioni contenute nei primi quattro libri dell'*Aritmetica* di Diofanto (circa un terzo), con ottica geometrica e nell'ambito della logistica speciosa. Altri, ad esempio, che riguardano le proporzioni continue, non trovano il corrispondente in Diofanto.

Libro I
Dieci Zetetici che consistono nel cercare due quantità (lati) di cui sia data la somma, la differenza, il rapporto, oppure una quantità noto il rapporto dei suoi eccessi o difetti rispetto a dei valori dati.

Zetetico I, 1*:*
Data la somma e la differenza di due lati, trovare i lati.

Zetetico I, 4*:*
Datis duobus lateribus deficientibus a justo, una cum ratione defectuum, invenire latum iustum
Dati due lati minori di un terzo (lato giusto) e il rapporto dei difetti, trovare il lato giusto (dati B e D e dato $A - B/ A - D = R/S$ trovare A)

Libro II
Ventidue zetetici dove si devono trovare due lati di cui è nota la somma o la differenza, il prodotto, il rapporto, la somma o differenza dei loro quadrati o cubi ecc.

Zetetico II, 3
Dato il prodotto di due lati e la loro differenza, trovare i lati

Zetetici II, 7 e 8
Data la differenza dei quadrati e la somma o differenza dei lati, trovare i lati.

Libro III
Sedici zetetici riguardanti triangoli rettangoli e serie di grandezze in proporzione.

Zetetico III, 1
Data la media di tre linee in proporzione continua e la differenza delle estreme, trovare le estreme.

Libri IV e V
Rispettivamente venti e quattordici zetetici con problemi indeterminati relativi alla decomposizione o composizione di numeri in quadrati o cubi.

De aequationum recognitione (1615)

Si compone di venti capitoli. Vengono studiate le equazioni dal punto di vista della ***Zetesi***, del ***Plasma*** e della ***Sincresi***.

Effectionum geometricarum Canonica recensio (1615)

Ha per scopo principale la costruzione geometrica della soluzione di un'equazione di secondo grado, corrispondente alla fase della *retica* o *esegetica geometrica* dell'analisi vietiana.
Contiene anche diversi problemi geometrici di secondo grado risolti algebricamente.

Zetesi

Studia la riduzione di opportune equazioni algebriche a particolari *zetetici* (problemi), trasformandole in proporzioni continue.

Esempio 1:

Capitolo III, Teorema I:
Si A quadratum plus B in A aequetur Z quadrato: sunt tres proportionales radices, quarum media est Z, differentia vero extremarum B, et sit A minor extrema.
Se A quadrato più B per A è uguale a Z quadrato, allora esistono tre grandezze in proporzione [continua], la media delle quali è Z, inoltre B è la differenza delle estreme ed A è l'estrema minore.

Dunque, consideriamo l'equazione di secondo grado nell'incognita A, con B e Z dati

$\boldsymbol{A^2 + BA = Z^2}$ si può scrivere (l'equazione è "ben ordinata")

$(B + A)A = Z^2$ da cui

$(B + A) : Z = Z : A$ questa è la Prima fase dell'analisi: zetetica

Allora abbiamo tre continue proporzionali di cui è nota la media Z e la differenza delle estreme $B = B + A - A$.
Il problema di determinare la soluzione A si riconduce a successivi *Zetetici*

Si sviluppa così la Seconda fase dell'analisi: poristica

***Zetetico III*, 1**
Data la media di tre linee in proporzione [*continua*] *e la differenza delle estreme, trovare le estreme.*
Ossia, dati Z *e* B, trovare E ed A nella proporzione

$E : Z = Z : A$ essendo $\begin{cases} EA = Z^2 \\ E - A = B \end{cases}$ Ci si riconduce ora allo

***Zetetico II*, 3**
Dato il prodotto di due lati e la loro differenza, trovare i lati
Si utilizza la 13) delle *Notae priores*:

$(E + A)^2 - (E - A)^2 = 4AE$ da cui per la precedente
$E + A = \sqrt{4Z^2 + B^2} = D$

Si ricorre ora allo

***Zetetico I*, 1**
Data la somma e la differenza di due lati, trovare i lati
Ossia:

$\begin{cases} E + A = D \\ E - A = B \end{cases}$ quindi $2A + B = D$ $A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$ ed infine

$$\boldsymbol{A = \frac{\sqrt{4Z^2+B^2}}{2} - \frac{B}{2}}$$

dove si riconosce la soluzione positiva dell'equazione data $\boldsymbol{A^2 + BA = Z^2}$

In modo analogo vengono poi esaminati i casi:

Teorema II

$\boldsymbol{A^2 - BA = Z^2}$ che si può scrivere

$(A - B)A = Z^2$ ossia $(A - B) : Z = Z : A$ [Note: Z e $B = A - (A - B)$]

Teorema III

$\boldsymbol{BA - A^2 = Z^2}$ che si può scrivere

$(B - A)A = Z^2$ ossia $(B - A) : Z = Z : A$ [Note: Z e $B = (B - A) + A$]

Per l'equazione $\boldsymbol{A^2 + BA = Z^2}$ vediamo a questo punto la

Terza fase dell'analisi: retica o esegetica

• La retica o esegetica aritmetica

consiste nel riportare un esempio numerico
($x^2 + 10x = 144$ dove B = 10, Z = 12, la proporzione è 18 : 12 = 12 : 8, A = 8)

• La retica o esegetica geometrica

viene sviluppata nella ***Canonica recensio***

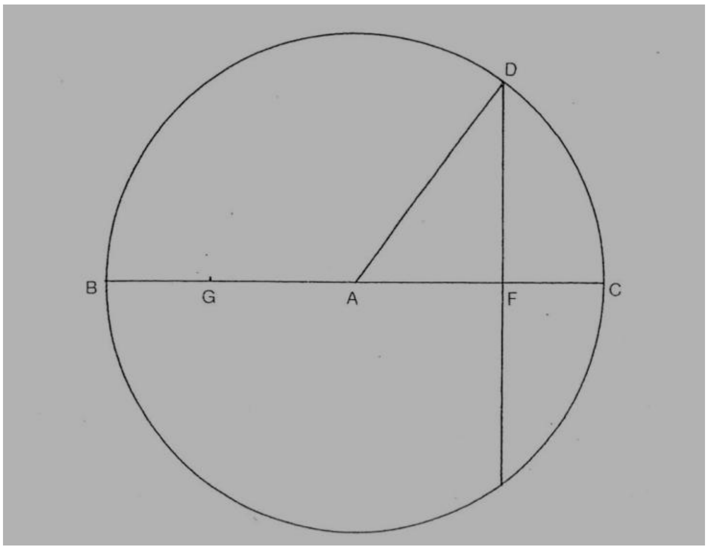
Nella *Canonica recensio*, alla precedente equazione Viète associa la corrispondente configurazione geometrica, ossia la costruzione geometrica della soluzione, tramite la

Proposizione XII (corrispondente allo *Zetetico III*, 1)
Data la media di tre grandezze in proporzione [*continua*] *e la differenza delle estreme, trovare le estreme.*

Siano DF = Z la media proporzionale e GF = B la differenza delle estreme, e si riporti DF perpendicolarmente a GF. Detto A il punto medio di GF, si tracci la circonferenza di centro A e raggio AD, che permette di costruire FC.
Abbiamo:

BF = GF + FC (essendo BG = FC) inoltre

BF : DF = DF : FC dunque, posto FC = A segue



$(B + A) : Z = Z : A$

Da questa proporzione, dove sono date la media e la differenza delle estreme, otteniamo l'equazione di partenza

$A^2 + BA = Z^2$

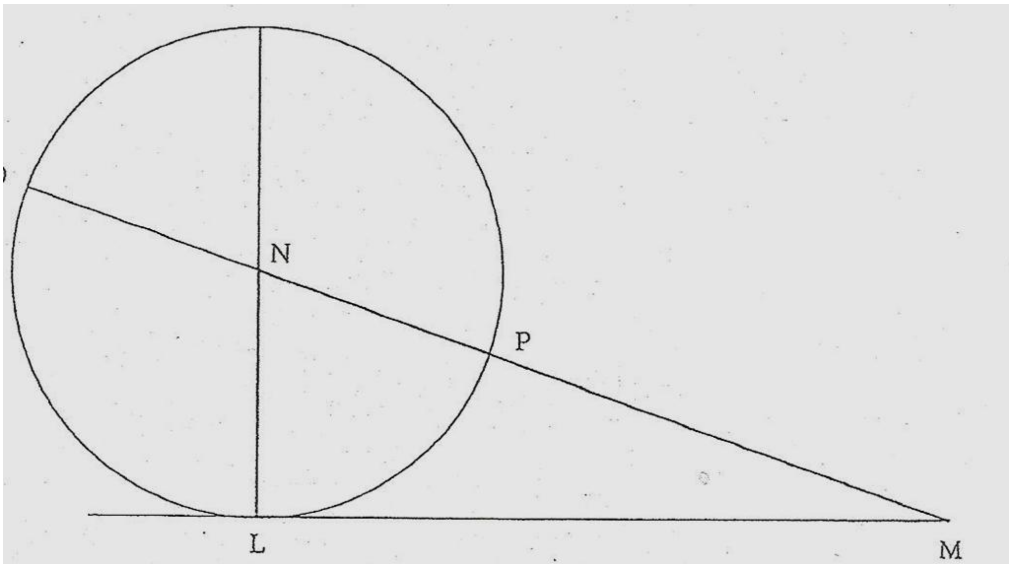
della quale abbiamo così costruito la soluzione A = FC .

Come vediamo in Viète il passaggio dall'equazione algebrica alla costruzione geometrica della corrispondente soluzione è mediato da una proporzione.

Prima di Viète, Rafael Bombelli, nella sua "Algebra linearia" (c. 1550)[1], e dopo Viète René Descartes nella *Géométrie* (1637), stabiliscono entrambi una relazione tra algebra e geometria, ma diversamente rispetto a Viète. Il passaggio dall'equazione e dalla sua soluzione alla corrispondente costruzione geometrica è qui immediato.
Così, ad esempio, per l'equazione del tipo

$\boldsymbol{x^2 + ax = b^2}$ $(\boldsymbol{x^2 + 6x = 16})$ la soluzione $\boldsymbol{x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2}} = 2$

si costruisce nel seguente modo:
Presi i segmenti LM = b = 4 e LN = $\frac{a}{2} = 3$ tra loro perpendicolari, con centro in N si traccia la circonferenza di raggio NL. Risulta allora PM = x



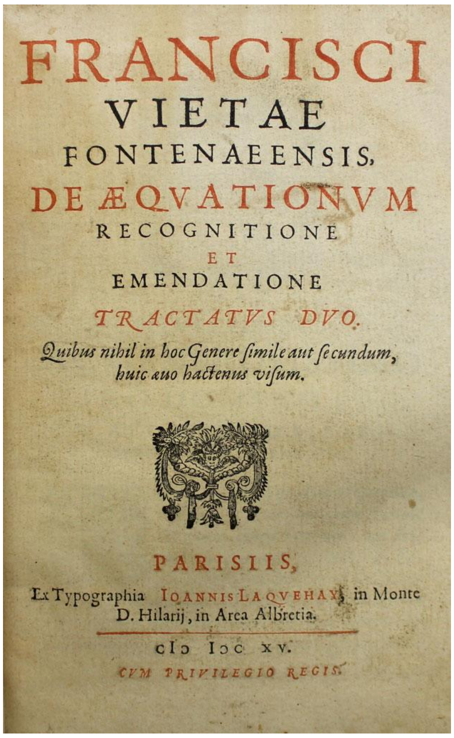
[1] L'"Algebra linearia" è sviluppata da Bombelli nei libri IV e V che costituiscono la parte geometrica della sua *Algebra*. Limitatamente ai primi tre libri l'*Algebra* fu pubblicata nel 1572. Gli ultimi due, tratti dal manoscritto B. 1569 dell'Archiginnasio di Bologna (c. 1550), furono pubblicati solo nel 1929. L'opera completa nel 1966.

Ritorniamo ora al *De aequationum recognitione* di Viète.

Per le equazioni di terzo grado e quarto grado vengono presi in esame diverse situazioni. Qui la maggior parte degli zetetici utilizzati non si trovano negli *Zeteticorum libri.*

Esempio 2

Capitolo IV, Teorema I
Si A cubus plus B quadratum in A aequetur B quadrato in Z: sunt quatuor continue proportionales, quarum prima maior minorve inter extremas est B, aggregatum vero secundae et quartae est Z, et fit A secunda.
Se A cubo più B quadrato per A è uguale a B quadrato per Z, allora esistono quattro grandezze in proporzione continua, la prima delle quali, maggiore o minore fra le estreme, è B, inoltre la somma della seconda con la quarta è Z e A è la seconda.



Data l'equazione

$\boldsymbol{A^3 + B^2 A = B^2 Z}$ abbiamo di seguito

$B^2(Z - A) = A^3$ da cui

$B : A = \dfrac{A^2}{B} : (Z - A)$

Inoltre

$B : A = A : \dfrac{A^2}{B}$

Per cui $\boldsymbol{B : A = A : \dfrac{A^2}{B} = \dfrac{A^2}{B} : (Z - A)}$

Ossia abbiamo quattro grandezza continue proporzionali, dove la prima è B, la seconda è A, mentre Z è la somma della seconda con la quarta $(Z = A + Z - A)$, L'equazione si riduce allo

Zetetico
Data la prima di quattro continue proporzionali e la somma della seconda con la quarta, trovare la seconda.

Plasma

Permette di trasformare un'equazione in un'altra più semplice, di grado minore o uguale, mediante un'opportuna sostituzione.
(Di fatto Viète procede al contrario, trasformando un'equazione in una più complessa, di grado maggiore o uguale).

Alcune trasformazioni plasmatiche

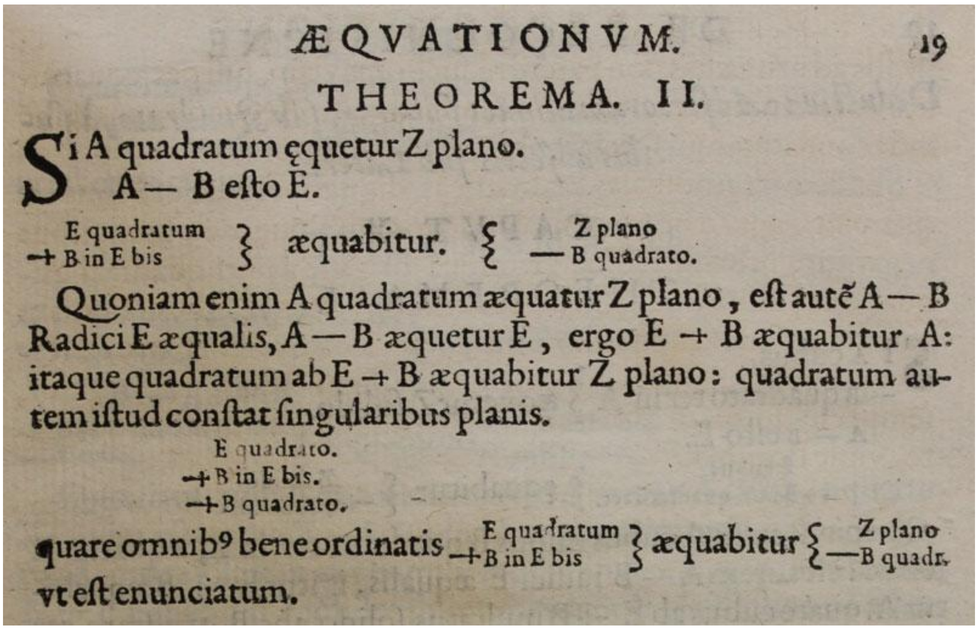
$$(*)\ \boldsymbol{A \pm B = E} \qquad\qquad \boldsymbol{A = BE}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{E^2}{B}} \qquad\qquad (*)\ \boldsymbol{A = \frac{B}{E}}$$

$$\boldsymbol{E^2 \pm AE = B} \qquad\qquad \boldsymbol{AE - E^2 = B}$$

Le $(*)$ erano state utilizzate da Girolamo Cardano nell'*Ars magna* (1545) e da Bombelli nell'*Algebra* (1572) per trasformare una generica equazione di terzo o quarto grado in una mancante rispettivamente del termine di secondo e di terzo, in modo da applicare i relativi metodi risolutivi.

Capitolo IX, Teorema II



ÆQVATIONVM. 19

THEOREMA. II.

Si A quadratum ęquetur Z plano.
A — B eſto E.

E quadratum + B in E bis } æquabitur. { Z plano — B quadrato.

Quoniam enim A quadratum æquatur Z plano, eſt autẽ A — B Radici E æqualis, A — B æquetur E, ergo E + B æquabitur A: itaque quadratum ab E + B æquabitur Z plano: quadratum autem iſtud conſtat ſingularibus planis.

E quadrato.
+ B in E bis.
+ B quadrato.

quare omnib9 bene ordinatis E quadratum + B in E bis } æquabitur { Z plano — B quadr. vt eſt enunciatum.

Data l'equazione binomia

1) $\boldsymbol{A^2 = Z}$ poniamo $\boldsymbol{A - B = E}$ ossia $A = E + B$ da cui

$(E + B)^2 = Z$ ottenendo l'equazione completa di secondo grado

2) $E^2 + 2BE = Z - B^2$ **Fino a qui Viète**

Viceversa, data un'equazione del tipo

3) $\boldsymbol{E^2 + \alpha E = \beta}$ $(x^2 + \alpha x - \beta = 0)$

confrontando le 2) e 3) e ponendo $\begin{cases} \alpha = 2B \\ \beta = Z - B^2 \end{cases}$ abbiamo

$$B = \frac{\alpha}{2} \qquad Z = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta$$

L'equazione 3), con $\boldsymbol{E = A - \frac{\alpha}{2}}$ diventa

$A^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta$ da cui segue la nota soluzione positiva, ossia

$$\boldsymbol{E = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} - \frac{\alpha}{2}}$$

Capitolo XI, Teorema I

Deductiua adfectorum Cuborum tam sub Quadrato, quam sub Latere, à Cubis adfectis sub Latere.

CAP. XI.

THEOREMA. I.

Si A cubus + D plano in A, æquetur Z solido,

A + B esto E. — E cubus − B in E quad. ter. + B quadrato ter. + D plano, in E. æquabitur Z solido, + D pl. in B + B cubo.

Data l'equazione

4) $\boldsymbol{A^3 + DA = Z}$ poniamo $\boldsymbol{A + B = E}$ ossia $A = E - B$ da cui

$(E - B)^3 + D(E - B) = Z$

5) $E^3 - 3BE^2 + (3B^2 + D)E = Z + DB + B^3$

Viceversa, data un'equazione completa del tipo

6) $\boldsymbol{E^3 - \alpha E^2 + \beta E = \gamma}$ e posto $\begin{cases} \alpha = 3B \\ \beta = 3B^2 + D \\ \gamma = Z + DB + B^3 \end{cases}$ si ricava

$$B = \frac{\alpha}{3} \qquad D = \beta - \frac{\alpha^2}{3} \qquad Z = \gamma - \left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right)\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{27} = \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}$$

Così l'equazione 6), con $\boldsymbol{E = A + \frac{\alpha}{3}}$ diventa

$A^3 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right)A = \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}$ che si può risolvere con le note formule

Infine si trova la soluzione della 6).

Capitolo XII, Teorema I

Data l'equazione

$\boldsymbol{A^2 + BA = Z}$ poniamo $\boldsymbol{BA = E^2}$ ossia $A = \frac{E^2}{B}$ da cui la biquadratica

$\boldsymbol{E^4 + B^2E^2 = Z\, B^2}$

Sincresi

E' il confronto tra due equazioni *correlative*. In pratica permette

a) di esprimere i coefficienti in funzione delle radici (formule di Viète-Girard).

b) di stabilire una relazione tra un'equazione e una proporzione continua in cui intervengono le radici dell'equazione.

Più precisamente vengono prese in esame solo equazioni con due coefficienti.

Viète esamina tre casi: equazioni ***ancipite, contraddittorie*** **e** ***inverse***.

Consideriamo ad esempio le equazioni ***ancipite*** seguenti

1) $\boldsymbol{BA^m - A^n = Z}$
2) $\boldsymbol{BE^m - E^n = Z}$ $(m < n)$

Significa ammettere che A ed E sono le due soluzioni reali positive dell'equazione

$Bx^m - x^n = Z$

Abbiamo quindi:

$BA^m - A^n = BE^m - E^n$ da cui $A^n - E^n = B(A^m - E^m)$

$B = \frac{A^n - E^n}{A^m - E^m}$ Inoltre dalla 1)

$$Z = \frac{A^n - E^n}{A^m - E^m} A^m - A^n = \frac{A^nE^m - E^nA^m}{A^m - E^m}$$

che si potranno semplificare utilizzando opportune relazioni algebriche dimostrate nelle *Notae priores*.

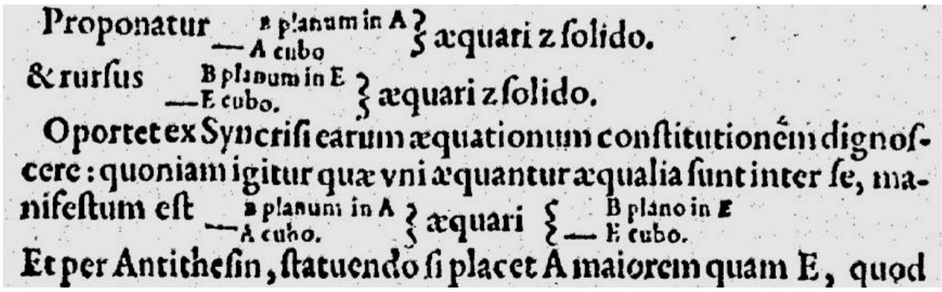
Ad esempio, per le equazioni di secondo grado (m = 1, n = 2)

$$\boldsymbol{BA - A^2 = Z}$$
$$\boldsymbol{BE - E^2 = Z} \quad \text{otteniamo}$$

$$B = \frac{A^2 - E^2}{A - E} = A + E \qquad\qquad Z = \frac{A^2E - E^2A}{A - E} = AE$$

ossia le relazioni tra i coefficienti e le due soluzioni positive dell’equazione
$Bx - x^2 = Z$ $\quad$ ($x^2 - Bx + Z = 0$)

Così, per le equazioni di terzo grado (m = 1, n = 3)


Proponatur $\left.\begin{matrix}\text{B planum in A}\\ -\text{A cubo}\end{matrix}\right\}$ æquari z ſolido.
& rurſus $\left.\begin{matrix}\text{B planum in E}\\ -\text{E cubo.}\end{matrix}\right\}$ æquari z ſolido.
Oportet ex Syncriſi earum æquationum conſtitutionem dignoſcere: quoniam igitur quæ vni æquantur æqualia ſunt inter ſe, manifeſtum eſt $\left.\begin{matrix}\text{B planum in A}\\ -\text{A cubo.}\end{matrix}\right\}$ æquari $\left\{\begin{matrix}\text{B plano in E}\\ -\text{E cubo.}\end{matrix}\right.$
Et per Antitheſin, ſtatuendo ſi placet A maiorem quam E, quod

$$\boldsymbol{BA - A^3 = Z}$$
$$\boldsymbol{BE - E^3 = Z}$$

otteniamo

$$B = \frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2$$

$$Z = \frac{A^3E - E^3A}{A - E} = \frac{AE(A^2 - E^2)}{A - E} = AE\,(A + E) \quad \text{oppure}$$

$$Z = A\,(AE + E^2) = E\,(AE + A^2)$$

che esprimono le relazioni tra i coefficienti e le due soluzioni positive dell’equazione
$Bx - x^3 = Z$

Vale inoltre la seguente

Proposizione

Se $BA - A^3 = Z$ *e* $BE - E^3 = Z$, esistono tre grandezze in proporzione continua, $A : \sqrt{AE} = \sqrt{AE} : E$, tali che B è la somma dei quadrati delle tre proporzionali e Z è uguale al prodotto di una delle estreme (A oppure E) per la somma dei quadrati delle altre due proporzionali.

De aequationum emendatione (1615)

Si studiano trasformazioni delle equazioni algebriche, in parte esaminate nel *De recognitione*. Molte erano già note ai precedenti algebristi, ma Viète ne fa una trattazione organica e sistematica, nell'ambito dell'algebra letterale.

Sono esposti cinque (di fatto sei) *remedia* contro eventuali "malformità" dell'equazione, che servono per "preparare" l'equazione in modo da poterla risolvere con i relativi metodi.

Præparationum igitur præſertim in numeris, ſolennes & ſpeciales modi ſunt fere quinque.

I. Expurgatio per Vncias.
II. Tranſmutatio Πρώτων ἐσχάτων.
III. Anaſtrophe.
IIII. Iſomęria.
V. Climactica Paraplerosis.

Expurgatio per uncias
Transmutatio
Anastrophe
Isomeria
Climactica simmetrica
Climactica paraplerosis

L'*expurgatio per uncias* permette, in una equazione di grado n, di far sparire il secondo termine di grado $n-1$, con una sostituzione del tipo $A = E \pm \alpha$. "Uncia" è ciò che si deve aggiungere o togliere all'incognita.
Nel *Plasma*, abbiamo visto come si passa da una equazione di terzo grado completa ad una di terzo, mancante del termine di secondo grado, con una sostituzione di quel tipo.

La *transmutatio* è "adversus vitium negationis".

Ad esempio data l'equazione con un coefficiente negativo

Proponatur A cubus — B plano in A æquari Z ſolido.
Sit autem explicanda æqualitas.
Quoniam igitur Z ſolidum, Poteſtas eſt adfecta negate, de negatis autem ars non ſtatuitur, quæ proponitur æquatio inexplicabilem primum tranſmutanda eſt, qualis quæ adficietur adfirmate, quo circa $\frac{\text{Z ſolidum}}{\text{A}}$ eſto E planum, ergo $\frac{\text{Z ſolidum.}}{\text{E plano.}}$ erit A, vnde ex iis quæ proponuntur.

$\frac{\text{Z ſolido-ſolido-ſolidum}}{\text{E plano-plano-plano.}}$ — $\frac{\text{B plano in Z ſolidum}}{\text{E plano}}$ æquabitur Z ſolido.

Ducantur, omnia in E plano-plano-planum.
Z ſolido-ſolido-ſolidum — B plano in Z ſolidum in E plano-planum. æquab. Z ſolid. in E pl. pl. pl.
& omnibus per Z ſolidum diuiſis, adhibitaq; congruâ Antitheſi

$\boldsymbol{A^3 - BA = Z}$ si pone $\boldsymbol{A = \frac{Z}{E}}$ da cui sostituendo

$$\frac{Z^3}{E^3} - B\frac{Z}{E} = Z$$

$$Z^3 - BZE^2 = ZE^3$$

$\boldsymbol{E^3 + B\,E^2 = Z^2}$ che ha tutti i coefficienti positivi

Nell'*Aliter* Viète procede in altro modo utilizzando le proporzioni. Infatti

$A^3 - BA = Z$ si può scrivere $A(A^2 - B) = \sqrt[3]{Z^3}$ da cui

$A : \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{Z^2} : (A^2 - B)$

Posto ora $A^2 - B = E$ ossia $A = \sqrt{E + B}$ abbiamo di seguito
$\sqrt{E+B} : \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{Z^2} : E$

$E\sqrt{E+B} = \sqrt[3]{Z^3}$ da cui $E^2\,(E + B) = Z^2$ ed infine $E^3 + B\,E^2 = Z^2$

L'*anastrophe* fa passare da un'equazione di terzo grado con due radici positive "neque ad analisin idonea" ad un'altra con una sola radice positiva, più adatta all'analisi. Uno degli ingredienti della trasformazione è la divisione per un binomio.

L'*isomeria* è "adversus vitium fractionis", ossia fa sparire i denominatori.

La *climactica simmetrica* è "adversus vitium asimmetriae", ossia fa sparire i coefficienti irrazionali (si dispongono i termini dell'equazione in modo che elevando a potenza si eliminino le radici).

La *climactica paraplerosis* permette di risolvere un'equazione di quarto grado tramite una di secondo, prendendo come intermediaria un'equazione di terzo grado.

Vediamo ora la risoluzione dell'equazione di terzo grado

Ricordiamo che la cosiddetta "formula cardanica", scoperta da Scipione dal Ferro e ritrovata da Nicolò Tartaglia, per l'equazione di terzo grado

$\boldsymbol{x^3 + px = q}$ si ottiene ponendo $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

ricavando u e v dal sistema

$\begin{cases} uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ u - v = q \end{cases}$ e sostituendo nella precedente

Si ottiene così

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{3}}\right)^3} + \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{3}}\right)^3} - \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}}$$

Capitolo VII, Problema I

$\boldsymbol{A^3 + 3BA = 2Z}$

a) Viète effettua un cambio di variabile tramite la *trasformazione plasmatica*

$\boldsymbol{AE - E^2 = B}$ ossia

$\boldsymbol{A = \frac{B}{E} - E}$ per cui sostituendo

$$\left(\frac{B}{E} - E\right)^3 + 3B\left(\frac{B}{E} - E\right) = 2Z$$

$$\frac{B^3}{E^3} - E^3 - 3\frac{B^2}{E^2}E + 3\frac{B}{E}E^2 + 3\frac{B^2}{E} - 3BE = 2Z$$

da cui l'equazione di secondo grado in E^3

$E^6 + 2ZE^3 = B^3$ **Fino a qui Viète**

Possiamo ora proseguire ricavando

$E^3 = \sqrt{Z^2 + B^3} - Z$ quindi $E = \sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} - Z}$ ed

$$A = \frac{B}{\sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} - Z}} - \sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} - Z}$$

Razionalizzando la frazione, ossia moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} + Z}$ otteniamo:

$$\boldsymbol{A = \sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} + Z} - \sqrt[3]{\sqrt{Z^2 + B^3} - Z}}$$

Ritroviamo così la nota formula risolutiva dell'equazione $\boldsymbol{A^3 + 3BA = 2Z}$

Bibliografia essenziale

Cajori F., *A History of mathematical notations*, New York, Dover Publications, 1993.

FREGUGLIA P., *Algebra e geometria in Viète*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", IX, 1989, fasc. 1, pp. 49-90.

FREGUGLIA P., *Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", XIV, 1994, fasc. 2, pp. 259-298.

GIUSTI E., *Algebra and Geometry in Bombelli and Viète*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", XII, 1992, fasc. 2, pp. 303-328.

MARIE M., *Viète François*, in *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, vol. III, 1884, pp. 27-64.

RITTER F., *François Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son oeuvre*, in "Revue occidentale philosophique, sociale et politique", 10 1895.