Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

19, 20 e 21 ottobre 2017
CENTRO CONGRESSI LA FORTEZZA
Via dei Montefeltro - Sansepolcro

il folletto della geometria proiettiva

prof. Sergio Bastianelli
I.I.S. ‘V. Moretti’
Roseto degli Abruzzi

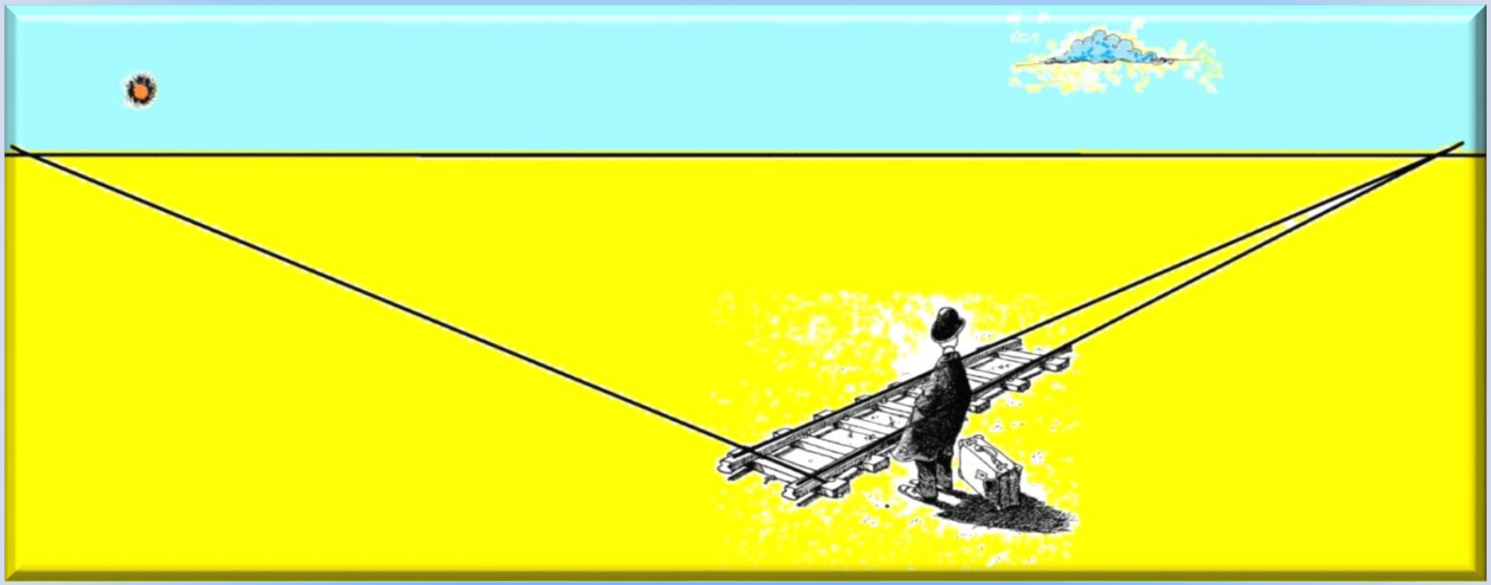
Sunto

Un folletto genera il piano proiettivo P contraendo le rette vettoriali dello spazio e con un modello tridimensionale, semplice ma efficace, mostra la corrispondenza biunivoca tra il piano usuale π con l’insieme dei punti propri di P.

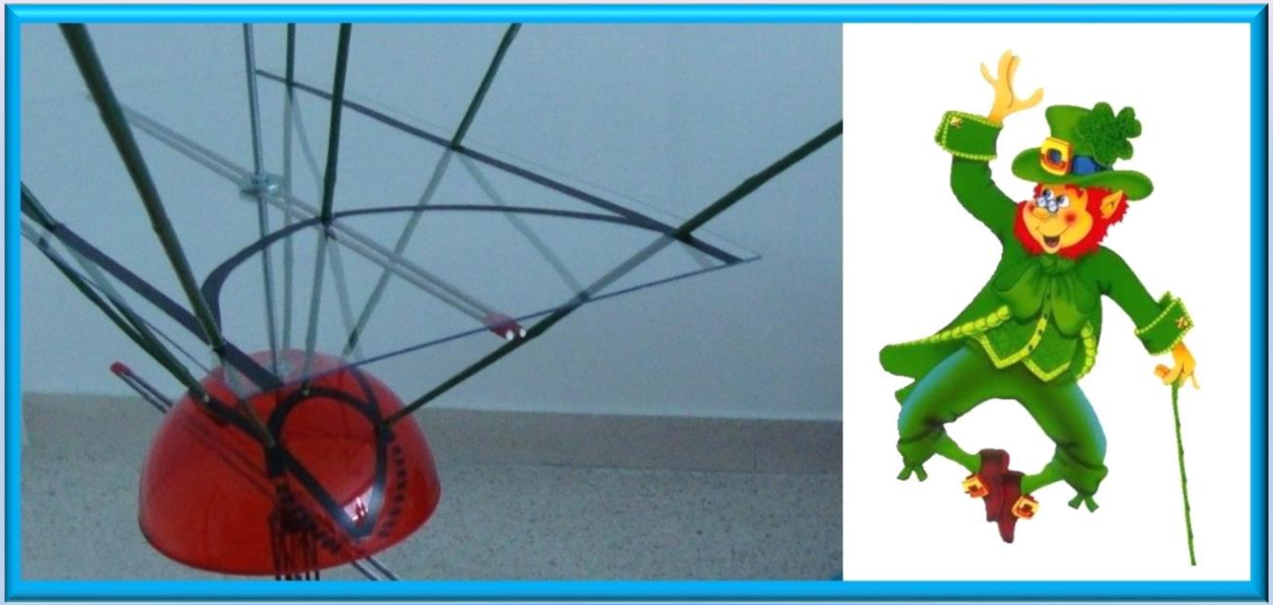
Nel modello sono rappresentati un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ dello spazio, un piano π posto ad una certa altezza $h > r$ ed una semisfera di centro O e raggio r, avente la circonferenza bordo sul piano $z = 0$; tramite stecche si visualizzano le rette dello spazio passanti per l'origine O che, contraendosi in modo ordinato sui punti d'intersezione con la semisfera, generano i punti di P.

Il folletto si divertirà a … far convergere le rette parallele e a … chiudere le parabole.

IL FOLLETTO DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA



Nella geometria euclidea due rette parallele non hanno alcun punto in comune; tale affermazione è in contrasto con l'esperienza che realizza il prof. di matematica davanti ad un binario mentre attente il treno della … felicità: prolungando verso l'orizzonte le due rette parallele individuate dalle rotaie, si ha l'impressione che esse convergano allo stesso punto.



Quindi deve esistere un tipo di geometria in cui anche le rette parallele hanno il loro punto d'intersezione.

Presenteremo questo tipo di geometria immaginando l'esistenza di un folletto che sconvolgerà le nostre conoscenze: si divertirà ad incollare punti, ad accorciare rette, a far convergere quelle parallele e a trasformare parabole in ellissi.

IL PIANO PROIETTIVO

Sullo spazio $\Sigma = R^3$ assegniamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$.

Ogni punto P dello spazio è individuato da una terna (x; y; z) di numeri reali che esprimono le distanze, prese con il loro segno, del punto dai tre piani coordinati [$x = \pm\, dis\,(P;\, piano\ yz)$, …] determinati dagli assi x, y e z (fig. 1).

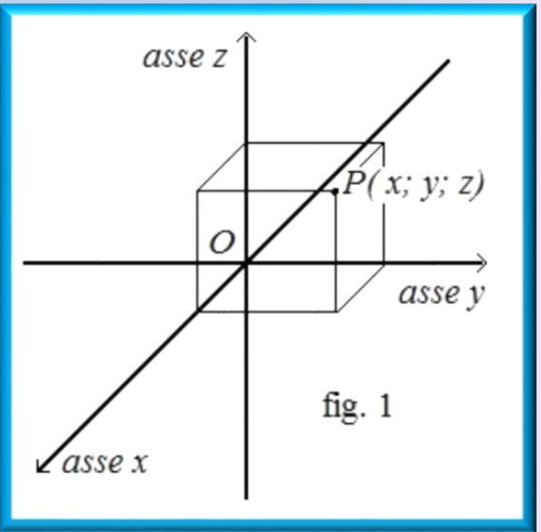


fig. 1

Dopo aver tolto l'origine O, il folletto incolla i punti che hanno le coordinate proporzionali;

ad esempio: $A(\,2;-1;\,3\,)$, $A'(\,4;-2;\,6\,)$, e in generale $A''(\,2k;-k;\,3k\,)$, con $k \neq 0$, sono punti distinti di $\Sigma - \{O\}$, ma per il folletto costituiscono lo stesso "punto" poiché tutti tra loro appiccicati.

Per distinguere i normali punti dello spazio da quelli che si ottengono dopo l'incollamento usiamo scritture diverse: $P(\,x;y;z\,)$ indica il punto di $\Sigma-\{O\}$, mentre $P[\,x;\ y;\ z\,]$ indica il "punto" ottenuto dal folletto dopo l'incollamento.

In simboli:

$$P[\,x;y;z\,] \equiv \{\forall\ P(\,a;b;c\,) \in \Sigma-\{O\}/\exists k \neq 0\ \ con\ \ a = kx, b = ky, c = kz\}.$$

Il piano proiettivo P è l'insieme che si ottiene dopo aver incollato i punti dello spazio aventi le coordinate proporzionali.

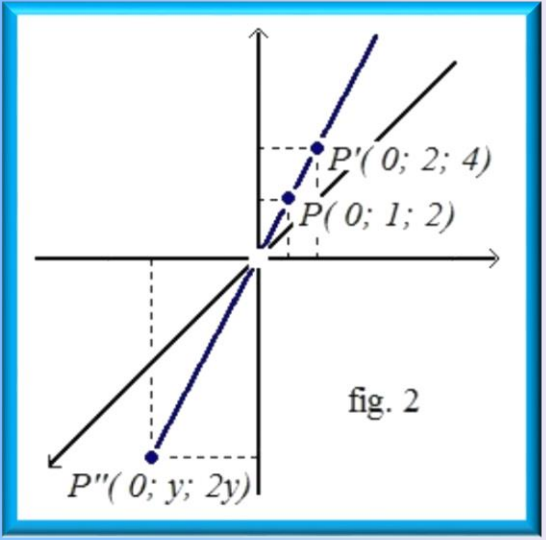


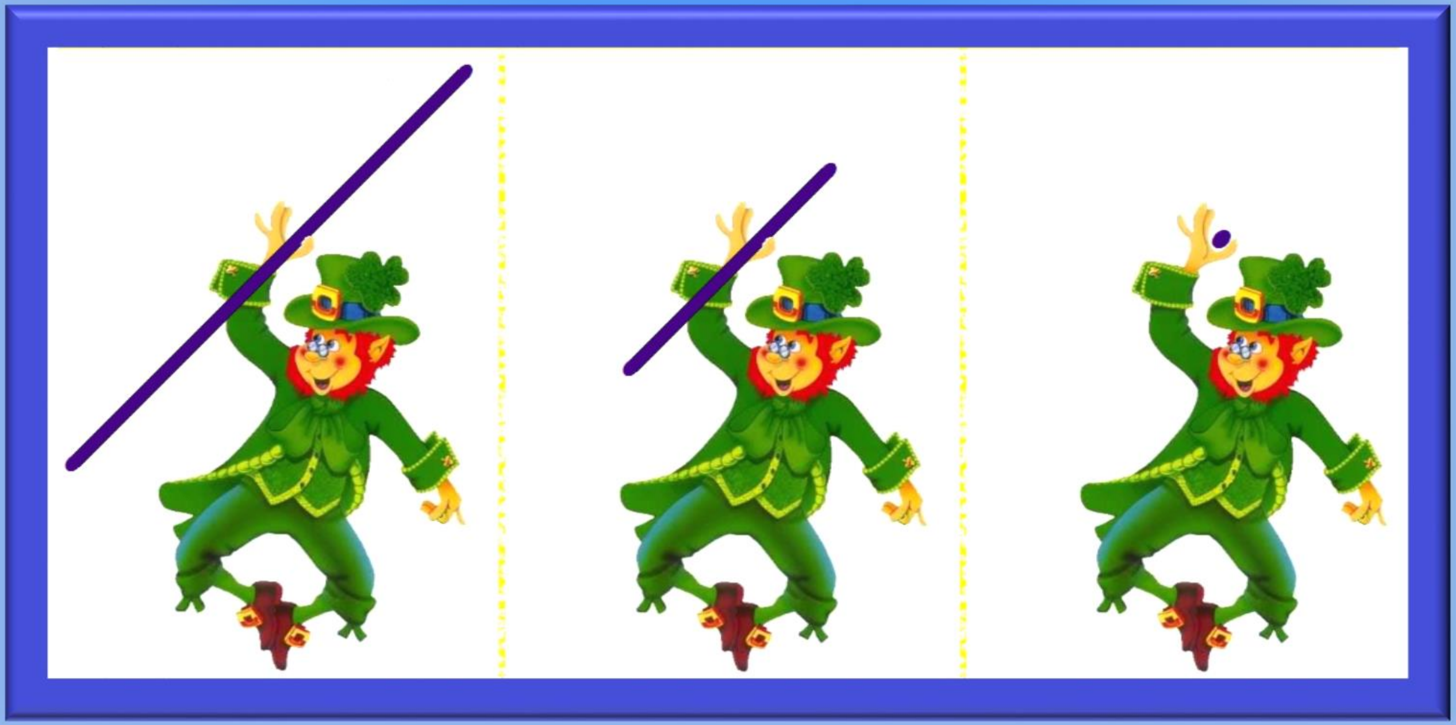
fig. 2

I punti di $\Sigma-\{O\}$ con le coordinate proporzionali appartengono alla stessa retta passante per l'origine. Ad esempio (fig. 2):

$P'(\,0;\ 2;\ 4\,)$ e in generale $P''(\,0;\ y;2y\,)$, aventi le coordinate proporzionali a quelle di $P(\,0;\ 1;\ 2\,)$, sono situati sulla stessa retta passante per l'origine definita tramite il sistema "$x = 0\ \wedge\ \ z = 2y$"; quando il folletto incolla questi punti su $P(\,0;\ 1;\ 2\,)$, contrae questa retta sino a ridurla ad un unico "punto".

Ogni incollamento può essere visto come contrazione di una retta passante per l'origine, per cui possiamo ridefinire il piano proiettivo nel modo seguente:

il piano proiettivo P è l'insieme i cui elementi $P[\,x;\ y;\ z\,]$, chiamati "punti" di P, si ottengono contraendo le rette di $\Sigma - \{O\}$ passanti per l'origine.



‘PUNTI PROPRI’ E ‘PUNTI IMPROPRI’ DEL PIANO PROIETTIVO

Sappiamo che nel piano usuale π , dopo aver fissato un sistema di riferimento cartesiano OXY, ogni punto P è individuato tramite una coppia (X; Y) di numeri reali che esprimono le distanze, prese con il loro segno, dai due assi (fig. 3).

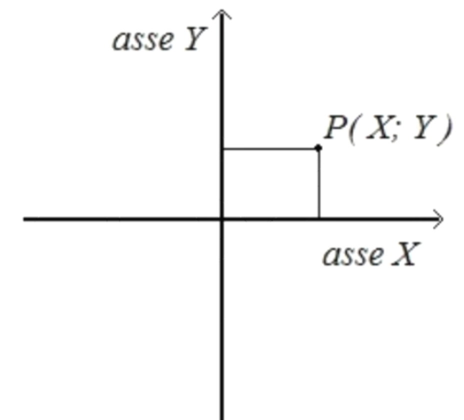


fig. 3

Il folletto ha creato il piano proiettivo **P** come un determinato insieme di “punti” ed usa una terna [x; y; z] di numeri reali per rappresentarli.

Su π sono sufficienti due coordinate per individuare un punto mentre su **P** ne occorrono tre; inoltre, terne [kx; ky; kz] proporzionali a [x; y; z] individuano lo stesso “punto” del piano proiettivo, poiché il folletto ha incollato i punti di $\Sigma - \{O\}$ aventi le coordinate proporzionali.

In pratica, le coordinate di un “punto” di **P** possono essere moltiplicate per ogni $k \neq 0$ senza che esso cambi.

Momentaneamente il piano proiettivo è un insieme '<u>caotico</u>' di infiniti e schifosi "punti" (fig. 4) ma di due tipi diversi.

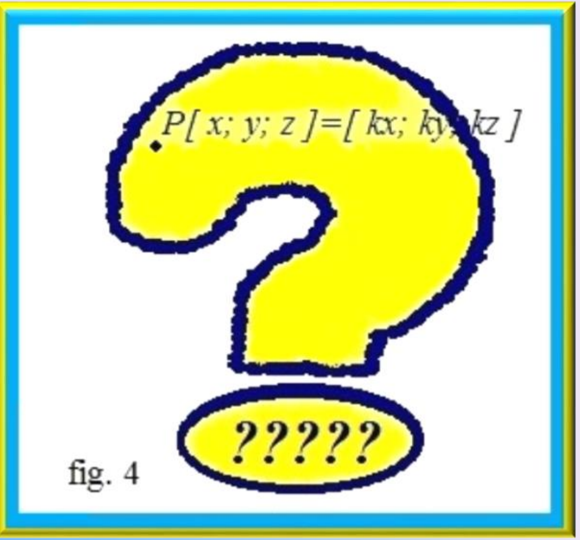


fig. 4

Il folletto chiama "punto proprio" ogni $P[\,x;\ y;\ z\,]$ avente $z \neq 0$ mentre chiama "punto improprio" o "punto all'infinito" ogni $P[\,x;\ y;\ z\,]$ con $z = 0$.

I "punti propri" del piano proiettivo P sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano usuale π (fig. 5).

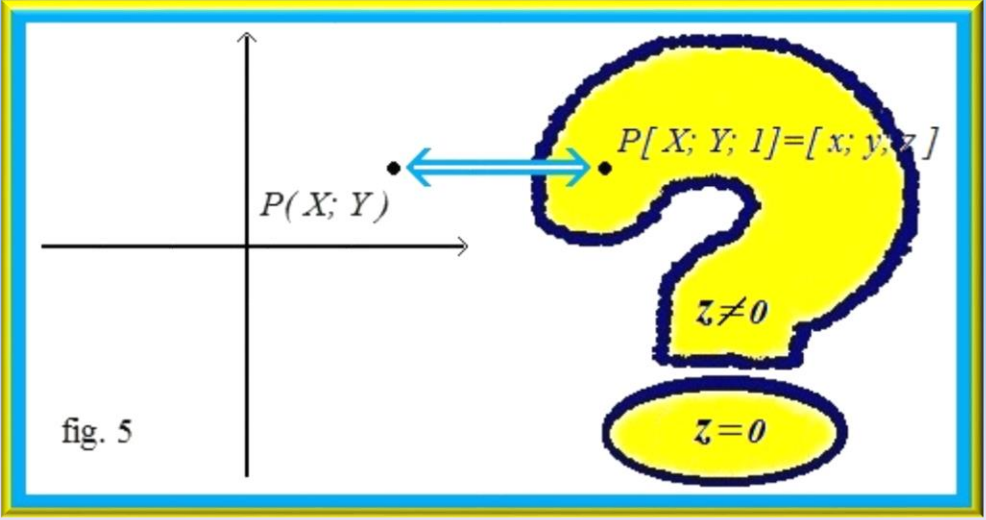


fig. 5

I “punti propri” del piano proiettivo P sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano usuale π.

Infatti,

se $P[\,x;\ y;\ z\,]$ ha $z \neq 0$, dividendo per z e ponendo $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$,

abbiamo che il “punto proprio” $P[\,x;\ y;\ z\,] = \left[\frac{x}{z}; \frac{y}{z}; 1\right] = [\,X;\ Y; 1\,]$

individua un unico punto $P(\,X;\ Y\,)$ del piano usuale π.

Viceversa ogni punto $P(\,X;\ Y\,)$ del piano usuale π individua un unico "punto proprio" $P[\,X;\ Y; 1\,]$ del piano proiettivo.

$$\boxed{P[\,x; y\,; z\,] = \left[\frac{x}{z}; \frac{y}{z}; 1\right] \leftrightarrow P(\,X; Y\,)}$$

MODELLI DEL PIANO PROIETTIVO

Il piano proiettivo è l'insieme dei "punti" ottenuti contraendo le rette di $\Sigma - \{O\}$ passanti per O; possiamo visualizzare **P** se le contrazioni avvengono in modo ordinato. In $\Sigma - \{O\}$ consideriamo la semisfera di centro O e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ con $z \geq 0$; (fig. 6).

Presa una qualunque retta passante per l'origine abbiamo:

a) se non giace sul piano xy $(z = 0)$, la retta buca la semisfera in un unico punto $P(\,x;\ y;\ z\,)$ avente $z \neq 0$; essa può essere contratta in tale punto ottenendo così il "punto proprio" $P[\,x; y; z\,]$ del piano proiettivo;

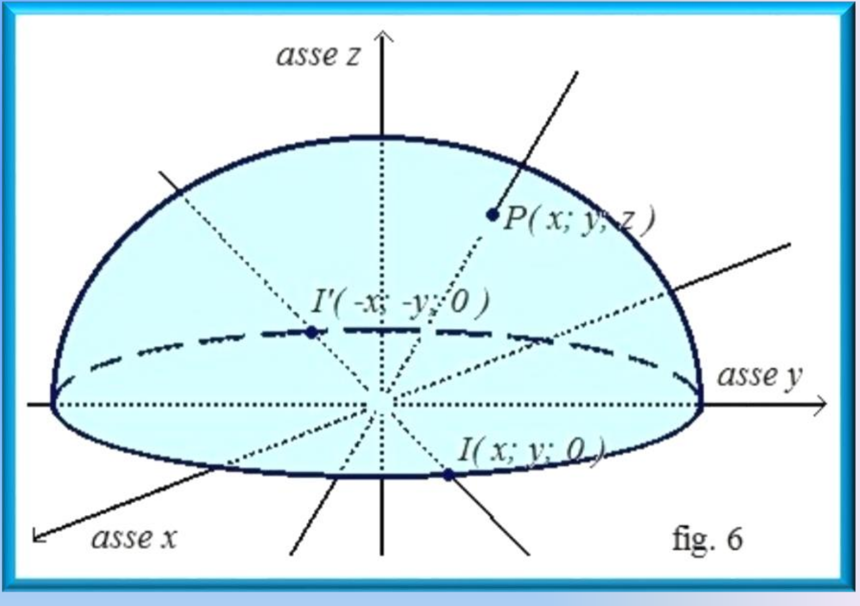
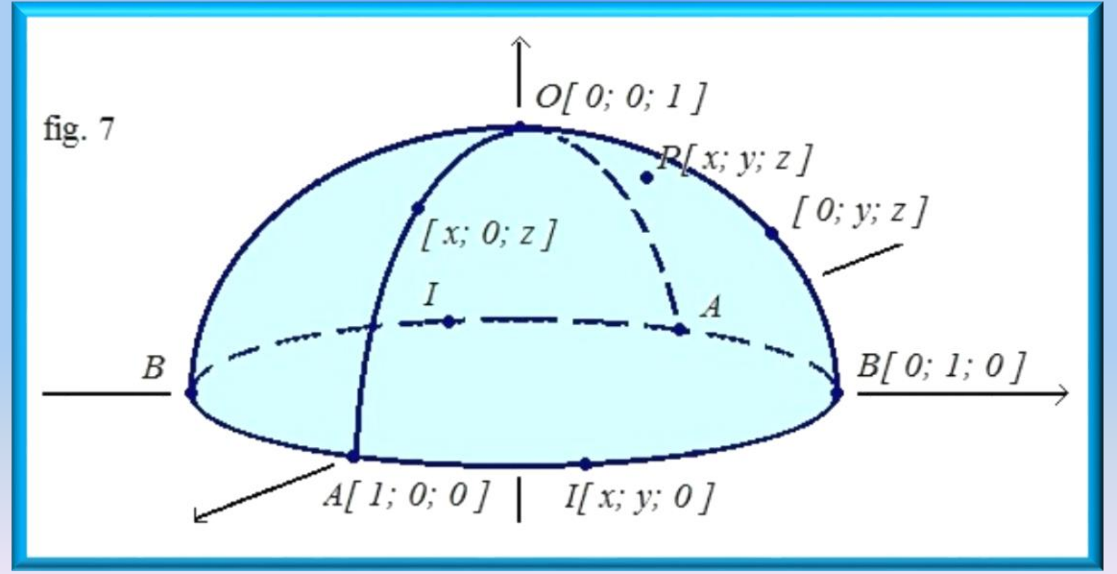


fig. 6

b) se giace sul piano $z = 0$, la retta buca la semisfera nei punti $I(\,x;\ y;\ 0\,)$ e $I'(\,-x; -y;\ 0\,)$ posti sulla circonferenza bordo della semisfera;

osservato che essi hanno le coordinate proporzionali, tale retta può essere contratta in I o in I', ottenendo in entrambi i casi i casi il “punto improprio” $I[\,x;\ y;\ 0\,]$.

Quindi la semisfera è un modello del piano proiettivo P (fig. 7) ma ogni coppia di punti diametralmente opposti della circonferenza bordo costituisce un unico “punto improprio”; invece, ciascun punto non situato sul bordo rappresenta un “punto proprio”.



I due “punti impropri” $A[\,x;\ 0;\ 0\,] = [\,1;\ 0;\ 0\,]$ e $B[\,0;\ y;\ 0\,] = [\,0;\ 1;\ 0\,]$ ed il punto proprio $O[\,0;\ 0;\ z\,] = [\,0;\ 0;\ 1\,]$ fissano il sistema di riferimento di **P**, ereditato direttamente dal sistema di riferimento dello spazio. Infatti:

_la “semicirconferenza” con gli estremi incollati AOA è l'insieme dei “punti” ottenuti contraendo le rette situate sul piano xz di equazione $y = 0$;
essa costituisce l'asse delle x poiché i suoi “punti propri”

$$[\,x;\ 0;\ z\,] = \left[\,\frac{x}{z};\ 0;\ 1\,\right] = [\,X;\ 0;\ 1\,]$$

corrispondono ai punti $(\,X; 0\,)$ del piano usuale;

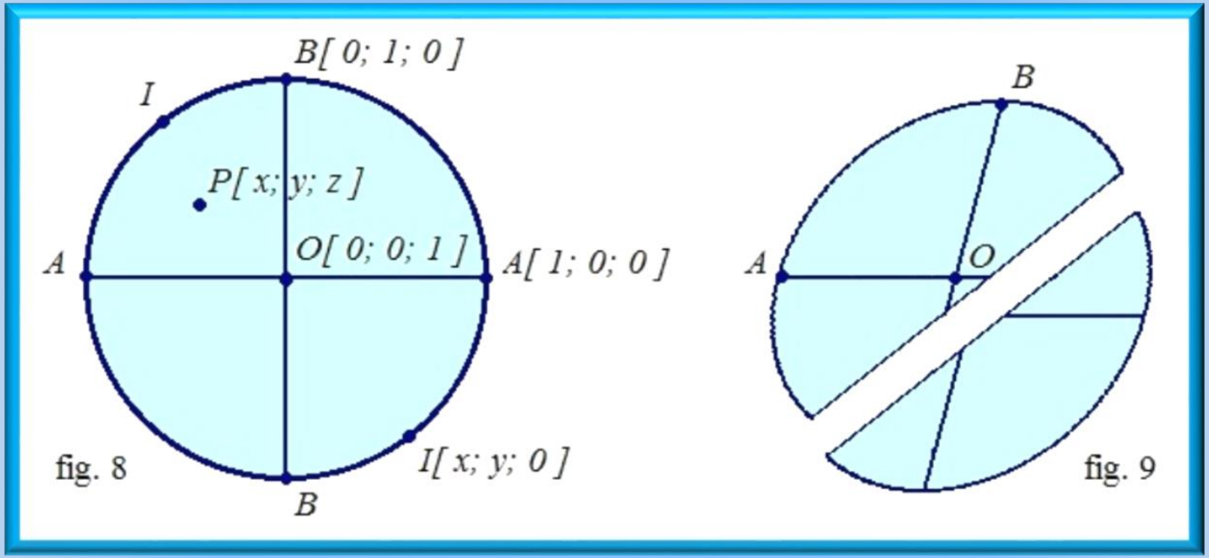
_la “semicirconferenza” con gli estremi incollati BOB è l'insieme dei “punti” ottenuti contraendo le rette situate sul piano yz di equazione $x = 0$;
essa costituisce l'asse delle y poiché i suoi “punti propri”

$$[\,0;\ y;\ z\,] = \left[\,0;\ \frac{y}{z};\ 1\,\right] = [\,0;\ Y;\ 1\,]$$

corrispondono ai punti $(\,0; Y\,)$ del piano usuale;

_la “circonferenza” $ABAB$ è l'insieme di tutti i “punti impropri” ottenuti contraendo le rette situate sul piano xy di equazione $z = 0$.

Schiacciando la semisfera, il folletto trasforma il modello in un cerchio (fig. 8): il ‘diametro’ *AOA* è l'asse delle ascisse, il ‘diametro’ *BOB* è l'asse delle ordinate mentre la circonferenza *ABAB* con i punti diametralmente opposti incollati, rappresenta l'insieme dei ‘punti all'infinito’.



Infine il folletto taglia lungo una corda il cerchio, lo inclina ed elimina una sua parte (fig. 9);
ruota e dilata la figura in modo che l'arco costituito dai punti all'infinito possa essere visto come curva all'orizzonte.

Si ottiene così il modello normalmente utilizzato nella prospettiva (fig. 10).

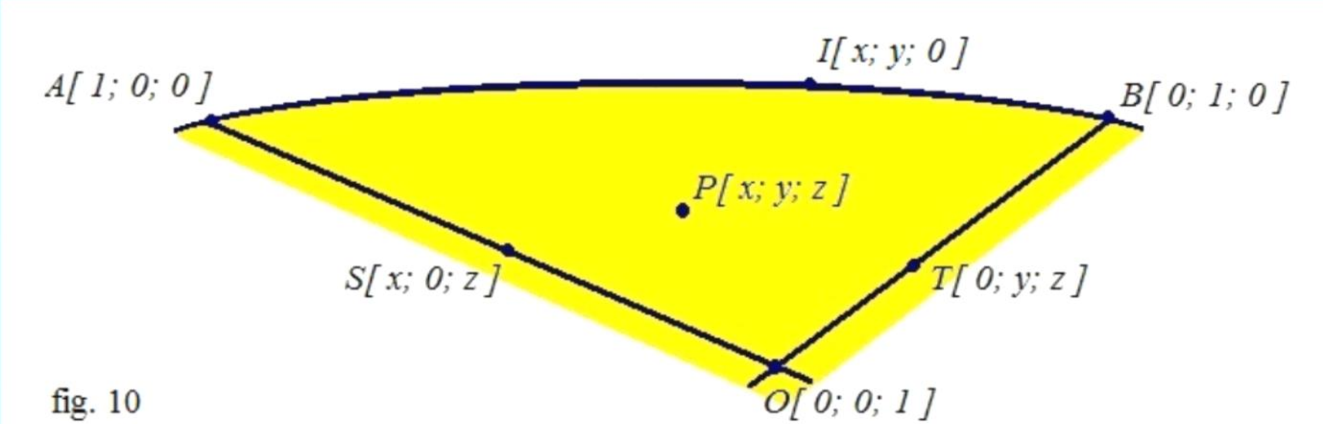


fig. 10

I punti *A, S* e *O* appartengono all'asse *x* (*y = 0*);
mentre *B, T* e *O* appartengono all'asse *y* (*x = 0*);
***A, I* e *B* sono "punti all'infinito" (*z = 0*).**

RETTE E PARABOLE NEL PIANO PROIETTIVO

Abbiamo visto che i “punti propri” $P[\,x; y; z\,] = \left[\frac{x}{z};\ \frac{y}{z};\ 1\right] = [\,X;\ Y;\ 1\,]$ del piano proiettivo corrispondono ai punti $P(\,X; Y)$ del piano usuale dopo aver posto $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$; cioè il piano usuale può essere considerato come il sottoinsieme dei “punti propri” di **P**.

Quindi qualunque figura geometrica del piano usuale individua una figura corrispondente nel piano proiettivo.

Una retta di π è costituita da tutti e solo i punti $P(\,X; Y)$ le cui coordinate sono soluzioni di una equazione lineare del tipo

[1] $aX + bY + c = 0;$

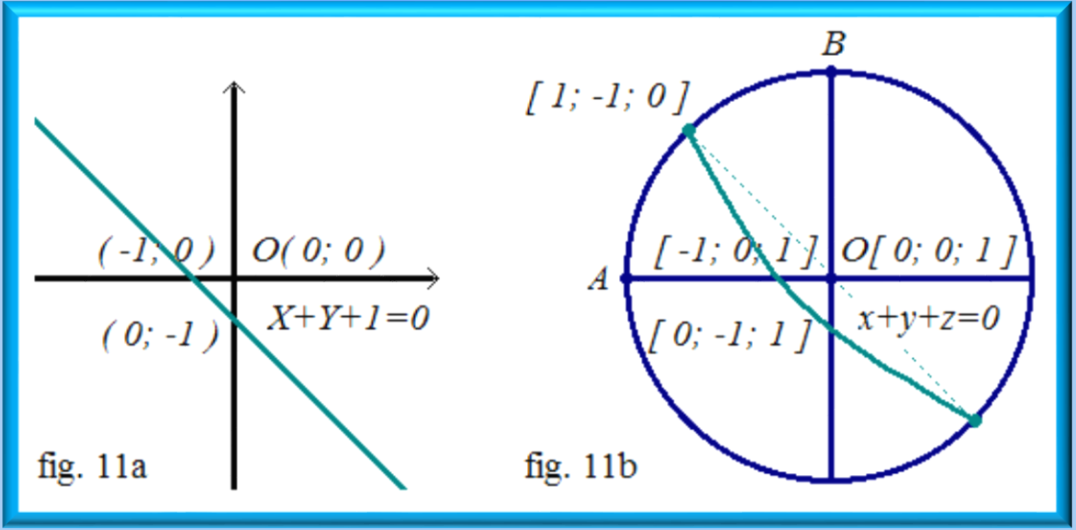
sostituendo $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, e moltiplicando per z, si ottiene l'equazione

[2] $ax + by + cz = 0,$

il cui insieme soluzione è una retta di **P** la quale contiene tutti i “punti propri” $P[\,x; y; z\,] = \left[\frac{x}{z};\ \frac{y}{z};\ 1\right] = [\,X;\ Y;\ 1\,]$ corrispondenti ai punti $P(\,X; Y)$ dati.

Le due equazioni però non sono equivalenti: ad ogni soluzione $(X; Y)$ di **[1]** corrisponde la soluzione $[X;\ Y;\ 1] = [x;\ y;\ z]$ di **[2]** con $z \neq 0$; ma esiste il "punto improprio" di coordinate $[b; -a;\ 0]$ soluzione di **[2]** che non ha alcuna corrispondente soluzione di **[1]**.

Inoltre la **[2]** contiene l'equazione particolare $z = 0$ il cui insieme soluzione è la "retta" dei "punti impropri" di **P**.



Ad esempio (fig. 11a, 11b e 11c), la retta **[3]** $X + Y + 1 = 0$ del piano usuale si trasforma nella retta **[4]** $x + y + z = 0$ del piano proiettivo: ad ogni punto

punto del piano π le cui coordinate $(X; -X-1)$ sono soluzioni della **[3]** corrisponde il "punto proprio" del piano proiettivo **P** le cui coordinate sono $[X; -X-1; 1] = \left[\frac{x}{z}; -\frac{x}{z} - 1; 1\right] = [x; -x-z; z]$ soluzioni della **[4]**; ma la retta (**4**) $x + y + z = 0$ di **P** contiene anche il "punto improprio" di coordinate $[x; -x; 0] = [1; -1; 0]$.

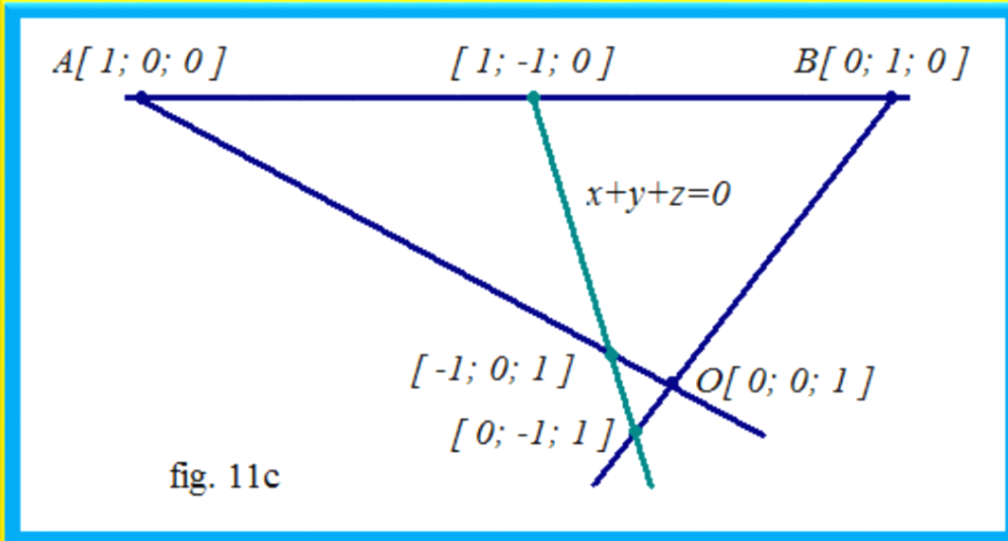


fig. 11c

Quindi il folletto, quando trasforma una retta [1] del piano usuale sulla retta corrispondente [2] del piano proiettivo P, aggiunge un "<u>punto all'infinito</u>".

Consideriamo le due rette parallele $Y = mX + k$ e $Y = mX + q$ del piano usuale π (con $k \neq q$); sostituendo $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, e moltiplicando per z, otteniamo le rette $y = mx + kz$ e $y = mx + qz$ del piano proiettivo **P**.

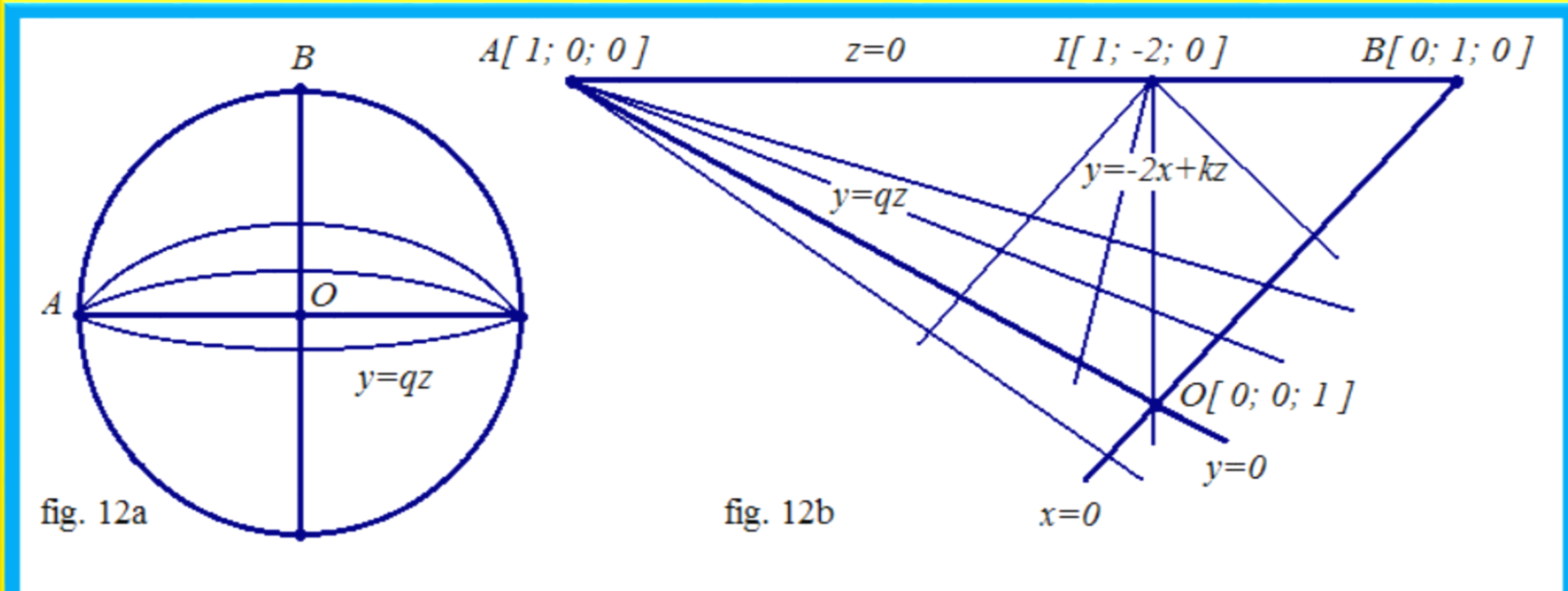
Poiché la terna $(\, x;\ mx;\ 0\,)$ è soluzione del sistema $\begin{cases} y = mx + kz \\ y = mx + qz \end{cases}$,

le due rette parallele si incontrano nello stesso "punto improprio" le cui coordinate sono $[\, x;\ mx;\ 0\,] = [\, 1;\ m;\ 0\,]$.

Quindi nel piano proiettivo il folletto fa convergere le rette parallele nello stesso "punto all'infinito".

Nel piano usuale π	**Nel piano proiettivo P**
le rette parallele	**le rette parallele**
$\boldsymbol{Y = mX + k}$ **e** $\boldsymbol{Y = mX + q}$	$\boldsymbol{y = mx + kz}$ **e** $\boldsymbol{y = mx + qz}$
hanno lo stesso coefficiente angolare $\boldsymbol{m}$	**hanno lo stesso "punto improprio" $\boldsymbol{[\, 1;\ m;\ 0\,]}$**

Per esempio (fig. 12a e 12b):
le rette $y = qz$ parallele alla retta $y = 0$ convergono in $A[\,1\,;\ 0;\ 0\,]$;
le rette parallele $y = -2x + kz$ convergono in $I[\,1; -2;\ 0\,]$.



Consideriamo nel piano usuale π la parabola di equazione $Y = X^2 + c$; sostituendo $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, e moltiplicando per z^2 si ha la parabola corrispondente nel piano proiettivo **P** di equazione $yz = x^2 + cz^2$.

Poiché la terna

$(\,0;\ y;\ 0\,)$ è soluzione

del sistema

$$\begin{cases} yz = x^2 + cz^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

la parabola

$$yz = x^2 + cz^2$$

incontra la retta $z = 0$

dei "punti all'infinito" in

$B[\,0;\ y;\ 0] = [\,0\,;\ 1;\ 0\,]$.

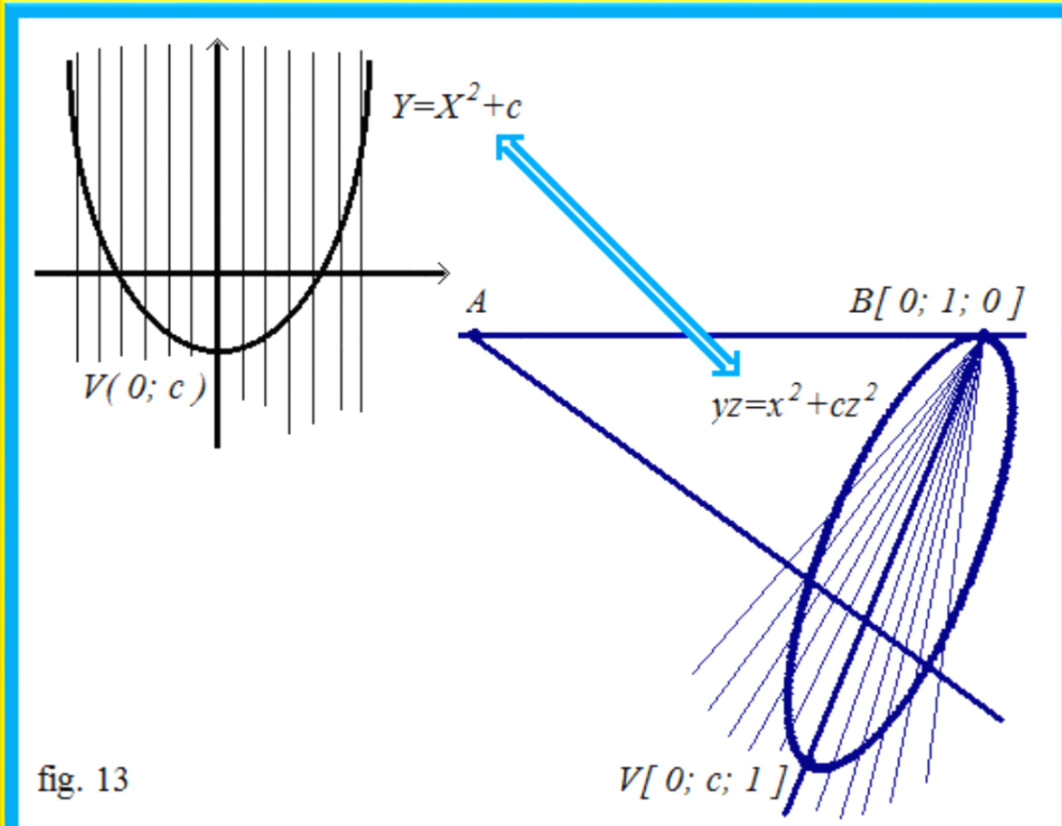
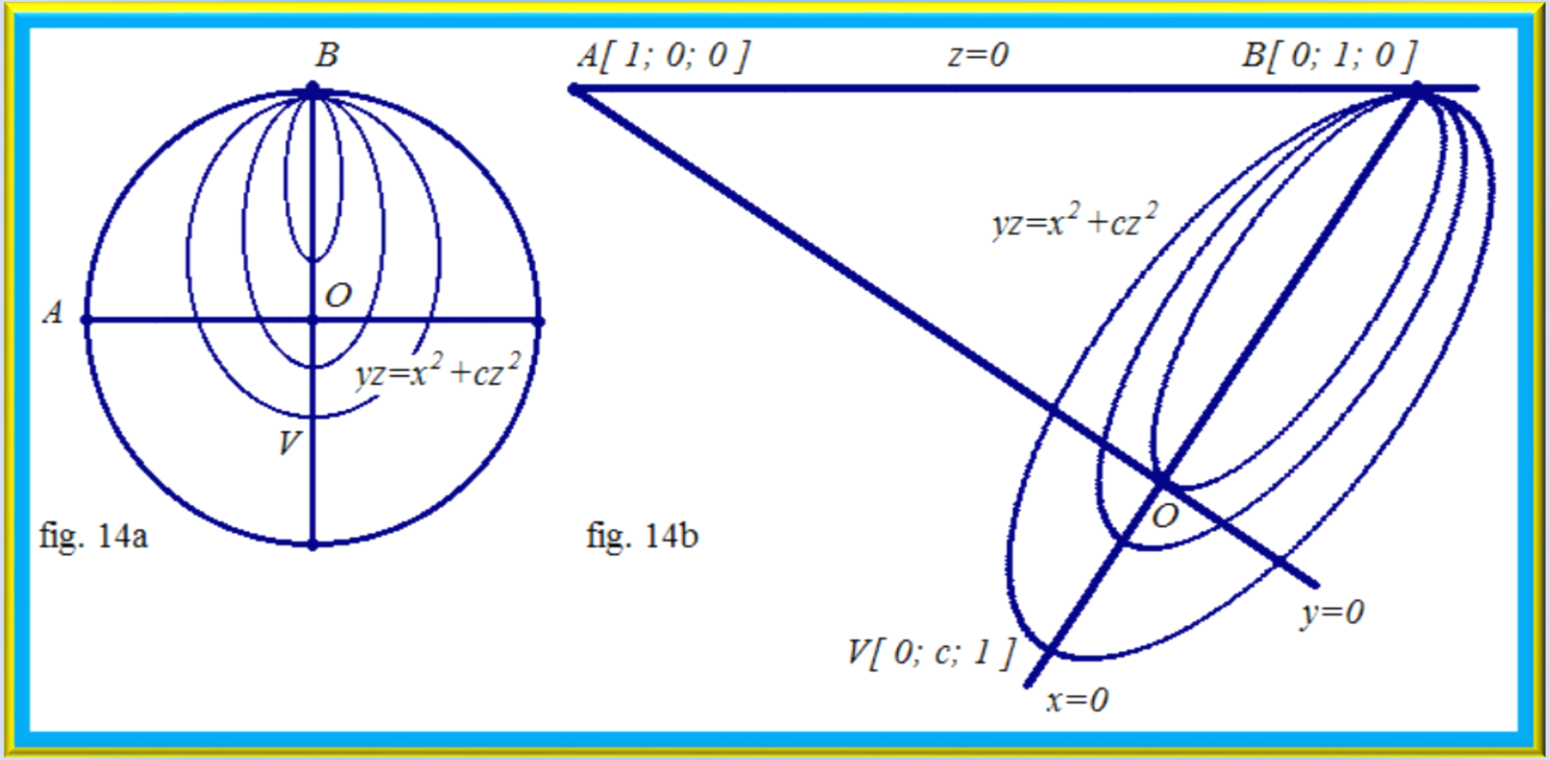


fig. 13

Quindi nel piano proiettivo P una parabola ha un unico "punto improprio"; il folletto si diverte a "<u>chiudere</u>" i rami della parabola (fig. 13) e la trasforma in una ellisse.

Variando c, l'equazione $yz = x^2 + cz^2$ rappresenta il fascio di parabole tangenti alla retta $z = 0$ in $B[\,0;1;0\,]$ (fig. 14 e 14b); il vertice generico $V[\,0;c;1\,]$ scorre lungo l’asse di simmetria di ciascuna parabola del fascio (asse $x = 0$).



Infine il modello dell’immersione del piano usuale π in quello piano proiettivo P …

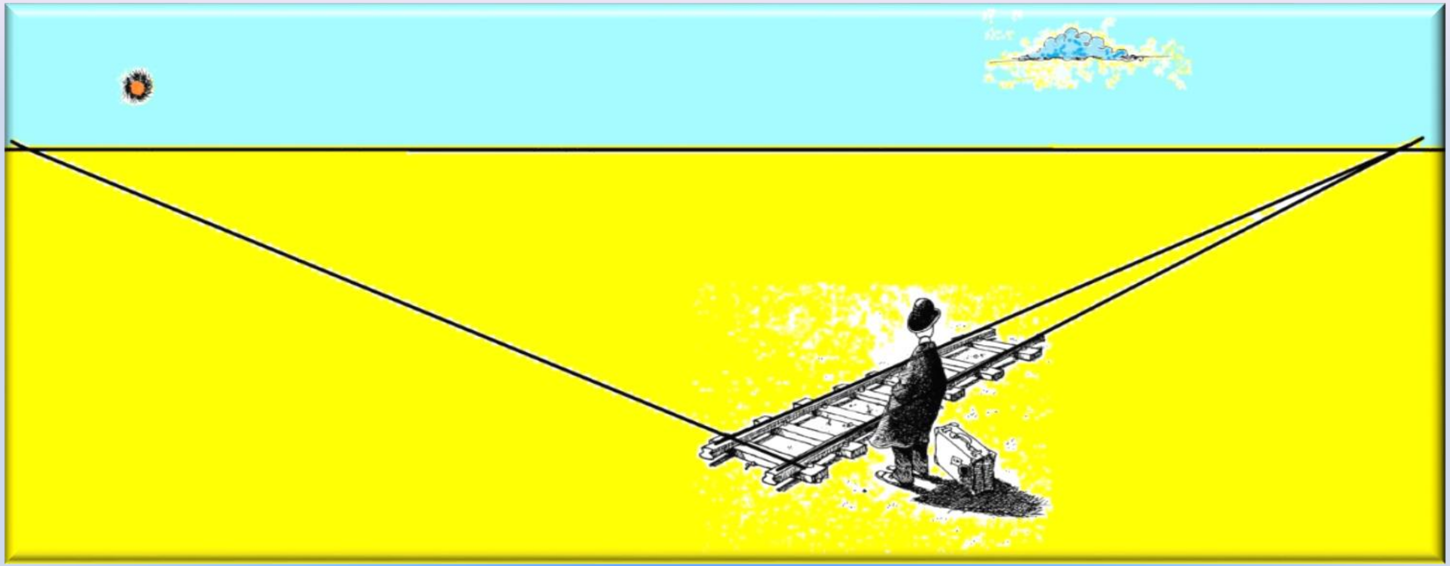
Questo modello tridimensionale evidenzia la **corrispondenza biunivoca** tra i punti di un **piano usuale** e i punti propri del **piano proiettivo**. Il piano usuale (**lastra di vetro sintetico**) è posto ad altezza **h>r** mentre la **zuppiera colorata** (semisfera di raggio **r** e centro **O**) rappresenta il piano proiettivo. Tramite le **stecche** ad ogni punto del piano usuale corrisponde un punto proprio del piano proiettivo. In tal modo le usuali rette parallele del piano si trasformano in "rette" parallele proiettive aventi lo stesso punto improprio o punto all'infinito (situato sul bordo della zuppiera); la parabola usuale del piano si trasforma nella "parabola" proiettiva in cui i rami convergono nello stesso punto improprio.

Magia del piano proiettivo:
le rette parallele convergono nello stesso punto all'infinito mentre la parabola si chiude in una ellisse.

Bibliografia

Boyer C. B., *Storia della Matematica*
Oscar saggi Mondadori, Milano 1990.
Carlotti M., *Do ut des 2*
Società Editrice Vannini, Brescia 1993.
Courant R., Robbins H., *Che cos'è la Matematica*
Universale scientifica Boringhieri, Torino 1971.
Sernesi E., *Geometria Uno*
Bollati Boringhieri, Torino 1989.
Sorani G., *Geometria Uno*
Dispense dell'Istituto di Matematica dell'Università dell'Aquila, a.a. 1978/79.

Il lavoro è stato realizzato con gli alunni della quarta C in occasione della “Settimana della Scienza e della Tecnica” tenutasi al liceo “M. Curie” di Giulianova (3 - 8 aprile 1998). Dopo vent’anni è stato riproposto nella quarta A Grafica e Comunicazione dell’I.I.S. “V. Moretti” di Roseto degli Abruzzi in Complementi di Matematica.



Cosa attende il misero insegnante di matematica mentre osserva il punto all'infinito?

Scegliere tra le seguenti opzioni:

a) il locale per … Samarcanda; b) la pensione; c) l'assegnazione dei docenti alle classi; d) le traccie d'esame; e) il rinnovo del contratto; f) l'abrogazione della legge 1101011; g) l'incontro tra Napoleone e Vittorio Emanuele III a Teano; h) l'insegnante di sostegno; i) la felicità …

Per la risposta, informazioni e suggerimenti: sergio.bastianelli@istruzione.it