

Algebra e Umanesimo

1. al-Khwarizmi e le origini dell'algebra

Pier Daniele Napolitani

Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Corso di formazione continua in matematica
Liceo di Mendrisio
9 febbraio 2017

- 1 1. Introduzione: un ossimoro?

- 2 2. La nascita dell'arte
 - 2.1. La città della pace: la Baghdad di al-Khwarizmi
 - 2.2. Il *Compendio del calcolo mediante la restaurazione e il confronto* di al-Khwarizmi
 - 2.3. Embriogenesi: un nuovo oggetto matematico, una nuova idea di numero

- 3 3. La diffusione dell'algebra nell'Occidente latino

Cosa a che fare l'algebra con l'umanesimo?

- Linguaggio naturale, linguaggio matematico, linguaggio simbolico
- Difficoltà di una lingua artificiale

È stato sempre così?

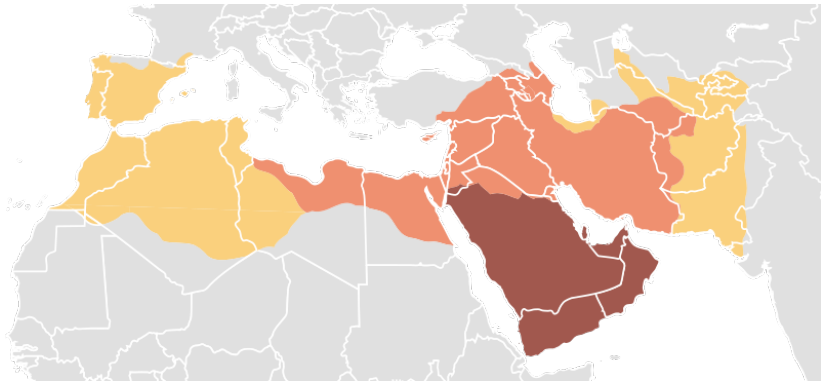
Fino al XVII secolo l'algebra

- **non solo** è un'*arte* che si esprime in un linguaggio vicino a quello naturale;
- **non solo** nasce in un contesto di riflessioni linguistiche e teologiche;
- **ma** la stessa nascita dell'algebra simbolica è legata indissolubilmente al movimento umanistico del XV e XVI secolo.

Menu

- **Antipasto:** le origini dell'algebra (Greci? Babilonesi? Indiani? Arabi?) e la sua diffusione nell'Occidente latino fra il XII e il XV secolo.
- **Primo:** la scuola italiana e il vicolo cieco delle equazioni di terzo grado.
- **Secondo:** la nuova matematica antica (Pappo e Diofanto, in particolare) offre una via di uscita, inaspettata.
- **Dessert:** la nascita dell'algebra come disciplina matematica.

L'impero dell'Islam



Espansione dall'Islam tra VII e VIII secolo

- Espansione sotto il profeta Maometto 622-632
- Espansione durante il califfato elettivo 632-661
- Espansione durante il califfato omayyade, 661-750

Eredità

- Alessandria
- Siria
- Gundishapur

I Califfi di Baghdad

- al-Mansūr (712 ca.–775): fondatore di Baghdad, la “città della pace”
- al-Mahdī (775–785)
- Hārūn ar-Rashīd (786–809): il califfo delle *Mille e una notte*, fondatore della Casa della Sapienza
- al-Ma'mūn (813–833): in seguito ad un sogno in cui gli era apparso Aristotele, invia una missione all'imperatore di Bisanzio per raccogliere manoscritti greci.

Il *Bayt al-Hikma*: la “Casa della Sapienza”

- Biblioteca sterminata
- Centro di traduzione: Euclide, Tolomeo, Archimede, Apollonio, Diofanto ...
- Istituzione dove svolgere corsi d'istruzione superiore, erede di Gundishapur
- Osservatorio astronomico

Il contesto in cui nasce la scienza islamica

- Fattori economici: il controllo musulmano su un impero che va dall'India ai Pirenei e il suo monopolio sulle rotte commerciali;
- Fattori materiali: la diffusione della carta che favorisce l'estensione dell'istruzione e lo sviluppo di una produzione scientifica e letteraria in arabo
- Fattori culturali: a Baghdad si fonda già nell'VIII sec. una tradizione di ricerca linguistica e teologica; di fondazione esegetica della parola divina e di fondazione della lingua in cui Dio si era espresso.

Linguistica e combinatoria

- al-Khalīl ibn Ahmad (718–786): matematico, autore di un'aritmetica; musicologo; fondatore della fonologia, prosodia e lessicografia araba;
- tutto l'arabo possibile in un solo libro!
 - * le radici hanno 2, 3, 4 o 5 lettere; le lettere sono 28;
 - * tutte le radici **astrattamente** possibili si ottengono per **combinazione**
 - * Applicando regole fonologiche e analisi storica, al-Khalīl **passa dall'astratto al concreto** ottenendo il primo dizionario dell'arabo.

al-Khwarizmi

Il padre della nostra aritmetica e dell'algebra:



Il matematico a cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione indiano, delle operazioni effettuate in questo sistema e di ciò che sarebbe divenuta l'arte dell'algebra è il persiano (?)

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 circa).
Di lui si sono conservate cinque opere, in parte rimaneggiate, di aritmetica, algebra, astronomia, geografia e sul calendario.

Algoritmi

Il libro di aritmetica si conosce solo attraverso una versione latina del XIII sec., conservata a Cambridge e pubblicata a Roma nel 1857 da B.

Boncompagni, col titolo *Algoritmi de numero indorum*.

Il termine ***algorithmus*** deriva dal nome latinizzato di al-Khwarizmi e ha designato, fino al sec. XVII, il sistema di numerazione posizionale decimale, e, successivamente, un procedimento sistematico di calcolo.

Al-Kitāb al-muktasar fī hisāb al-jabr wa-l-muqābala

- dedicato a al-Ma'mūn → 820 ca.
- almeno 8 mss. arabi (il più antico 1220 ca.)
- tre traduzioni latine
 - * Roberto di Chester, redatta nel 1145 a Segovia
 - * Gerardo da Cremona (1114-1187), 1170 ca.: "scuola" di Toledo
 - * Guglielmo di Lunis (XIII sec.).
- edizione critica: Roshdi Rashed, 2007

La tradizione dell'*Algebra e almuqabala*

Ho trovato che i numeri dei quali abbiamo bisogno nei calcoli d'*al-jabr wa-al-muqābala* sono di tre tipi, vale a dire: le radici, i *quadrati* e il numero semplice, che non è rapportato né a una radice né a un *quadrato*. x

La radice, tra questi tipi, è ogni cosa che si moltiplichi per sé stessa, a partire dall'unità, per i numeri che sono al di sopra di essa e le frazioni che ne sono al di sotto.

Il *quadrato* è ciò che si ottiene quando si moltiplichi la radice per sé stessa. x

Il numero semplice è un numero che si esprime senza che sia rapportato né a una radice né a un *quadrato*.

Un ribaltamento concettuale

Non si tratta più, come presso Egizi e Babilonesi, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, che si possono tradurre in termini di equazioni, ma, al contrario, **si parte dalle equazioni** e i problemi vengono dopo.

E Diofanto? e i Greci? Ne parleremo tra poco!

Jabr e Muqābala

Intanto, che significano questi due termini?

- Jabr = restaurare, riparare

- * $5x^2 - 4x = 3x^2 + 10 \rightarrow$ viene aggiustato aggiungendo $4x \rightarrow 5x^2 = 3x^2 + 4x + 10$

- Muqābala = confrontare, semplificare

- * $5x^2 - 4x = 3x^2 + 4x + 10 \rightarrow$
confrontando i due membri e togliendo $3x^2 \rightarrow 2x^2 = 4x + 10$

Tre “numeri” ...

Ho trovato che i numeri dei quali abbiamo bisogno nei calcoli d'*al-jabr wa-l-muqābala* sono di tre tipi, vale a dire: le **radici** (*jidhr*), i **“quadrati”** (*māl*=bene, tesoro) e il numero semplice, che non è rapportato né a una radice né a un quadrato (*māl*).

[NB: la *radice* è ciò che si ricerca, ma a volte lo è anche il *māl*. L'«oggetto sconosciuto» è indicato anche con *shay'*: termine che permette di indicare l'ignoto come se fosse noto.]

La *radice*, tra questi tipi, è ogni cosa che si moltiplichi per sé stessa, a partire dall'unità, per i numeri che sono al di sopra di essa e le frazioni che ne sono al di sotto.

Il *quadrato* (*māl*) è ciò che si ottiene quando si moltiplichi la radice per sé stessa.

Il *numero semplice* è un numero che si esprime senza che sia rapportato né a una radice né a un quadrato.

da L. Catastini, F.Ghione, R. Rashed, *Algebra*, Carocci, Roma, 2016, p. 117

... e sei casi canonici

I tre “numeri” così astrattamente concepiti si **combinano** a due o a tre per dar luogo a sei casi:

- 1 Māl uguali a radici ($ax^2 = bx$)
- 2 Māl uguali a numeri ($ax^2 = b$)
- 3 Radici uguali a numeri ($ax = b$)
- 4 Māl e radici uguali a numeri ($ax^2 + bx = c$)
- 5 Māl e numeri uguali a radici ($ax^2 + c = bx$)
- 6 Radici e numeri uguali a māl ($bx + c = x^2$)

Per i primi tre casi si dice che si riducono tutti al terzo e si danno esempi.

La ricetta risolutiva

Se hai $māl$ e radici uguali a numeri, per esempio “Un $māl$ più dieci delle sue radici uguali a trentanove *dirham*” segui il procedimento:

- Dividi a metà il numero delle radici; risulta, in questo problema, cinque,
- che moltiplichi per sé stesso; si ha venticinque;
- lo aggiungi a trentanove, si avrà sessantaquattro,
- prendi la radice che è otto,
- dalla quale sottrai la metà del numero delle radici, che è cinque.
- Resta tre, che è la radice del $māl$ che vuoi, e il $māl$ è nove.

Per farla breve

Dopo l'esposizione delle equazioni semplici e composte seguono sei problemi (dividi 10 ...) che mostrano come ricondurre un problema generico a uno dei sei casi canonici. e seguono poi problemi geometrici e di eredità: al-Khwarizmi è così convinto di aver adempiuto a quanto aveva promesso:

Il favore che Dio ha accordato al-Ma'mūn, Principe dei Credenti, . . . il suo amore per la letteratura e il desiderio di attirare a sé coloro che vi si dedicano, di avvicinarseli, di stendere su di essi la sua protezione e di aiutarli a chiarire quello che era impenetrabile e a facilitare ciò che era difficile, mi hanno esortato a comporre un libro conciso sul calcolo del jabr e del muqābala, nel quale ho voluto racchiudere ciò che è sottile nel calcolo e quello che vi è in esso di più nobile, ciò di cui le persone hanno necessariamente bisogno nelle loro eredità, i loro lasciti, i loro scambi, i loro arbitraggi, i loro commerci, e in tutto quello che esse trattano le une con le altre quando si tratta dell'agrimensura delle terre, dell'apertura dei canali, della misurazione, e di altre cose rilevanti del calcolo e delle sue varietà

Equazioni e problemi

Numeri per operare

Diofanto e al-Khwarizmi

Un'arte che ha bisogno di giustificazioni: algebra e geometria

Il rinascimento del XII secolo

Una nuova matematica per una civiltà in espansione

Leonardo Pisano

Il *Liber abaci*

La cultura dell'abaco

L'algebra fra XIV e XV secolo